



“十四五”职业教育国家规划教材

(慕课版)

GAO

DENG

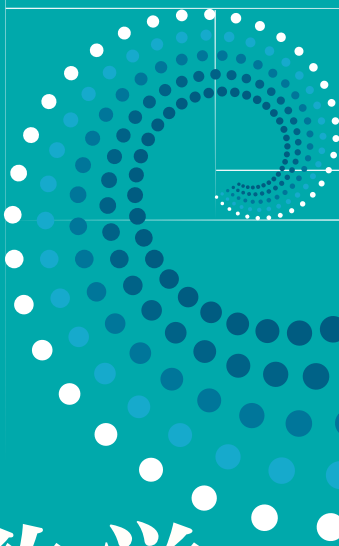
SHU

XUE

高等数学

(第二版)

主 编 张天德 赵树欣



$$F(n) = \begin{cases} 0 & , n=0 \\ 1 & , n=1 \\ F(n-1)+F(n-2) & , n>1 \end{cases}$$



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 张天德, 赵树欣主编. —2 版.—哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社, 2024.4(2025.9重印)
ISBN 978—7—5767—1362—6

I. ①高… II. ①张… ②赵… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2024)第 077193 号

策划编辑 李艳文 范业婷

责任编辑 李佳莹 付中英

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451—86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 天津市光明印务有限公司

开 本 787 毫米×1 092 毫米 1/16 印张 15.25 字数 315 千字

版 次 2020 年 11 月第 1 版 2024 年 4 月第 2 版 2025 年 9 月第 6 次印刷

书 号 ISBN 978—7—5767—1362—6

定 价 49.80 元

(如因印装质量问题影响阅读, 我社负责调换)

前 言

2019年,《教育部关于职业院校专业人才培养方案制订与实施工作的指导意见》中强调,在三年高职总学时中,公共基础课学时一般不少于总学时的 $1/4$,可见教育部充分肯定了公共基础课在学生发展和终生素质培养中的重要作用,在此背景下,编者编写了高等数学云教材。

本教材主要面向职业院校的教学,有效结合课程思政,充分体现高等数学为专业课服务的性质,突出了数学的实用性和易学性,能够适应国家对职业教育的新要求,能满足线上、线下教学的需求。本教材的编写宗旨为:让人人都能学会高等数学。重新设计思路,在定义定理的表述上使用朴素的语言描述,让学生易于与实践相联系、案例更贴近专业实际问题,从而使学生更容易理解、更能感受数学的真实价值所在。

本教材的结构特色如下。

1. 认真落实课程思政

积极响应党的二十大报告中指出的“育人的根本在于立德”,全面贯彻党的教育方针,落实立德树人根本任务。本教材每章都设有思政教学目标、拓展阅读模块,内容为成就介绍或者定理产生的历史渊源,同时在每章学习方法介绍中,穿插形象的比喻、实际问题的解决、数学中的人生哲学等内容,有助于课程思政教学的开展。

2. 思维导图呈现知识脉络

通过思维导图的形式总结每章知识点,学生容易将知识点对比、类比着联系学习,同时在此基础上形成自己的个性学习思维导图。

3. 丰富的案例

每章或每节都有实际案例引入,让学生带着实际问题去学习,能调动学生的主观能动性,使其体会数学的实用性。

4. 习题有梯度

每节后面的习题都分梯度设置,以进一步提高学生的学习信心和增加学生的成就感。

5. 支持线上线下教学

在每一章节都配备典型例题、经典习题的讲解视频,以满足线上线下混合教学模式的需求。

6. 便于学生自学

本教材从教学目标到教学方法、从学习方法建议到内容视频讲解的内容编排,能够满足学生独立学习要求。

7. 在线资源丰富有趣

数学对培养学生逻辑思维能力、全面发展理性思维等起着不可替代的作用,为学生可持续性发展奠定基础,让学生终生受用。本教材配有云教材,可下载“沃米云”APP 在线学习。

本教材由山东大学张天德教授设计整体框架和编写思路。在编写过程中,本教材得到山东大学数学学院的大力支持,以及德州职业技术学院、济南职业学院、济南市教育数学研究院、山东城市建设职业学院、山东经贸职业学院、山东职业学院的帮助,在此一并表示感谢。本教材积极响应党的二十大报告指出的“深化教育领域综合改革,加强教材建设和管理”“优化职业教育类型定位”“加强基础学科、新兴学科、交叉学科建设”“推进教育数字化”。同时本教材将教育理念创新、教学方式方法创新、信息技术创新结合在一起,旨在顺应时代特征,应用性更强、针对性更强,以实现“人人都能学会高等数学”的初衷。

由于时间仓促,编者水平有限,书中难免有不当之处,望各位同仁随时交流探讨,共同推进数学教学改革!

编者

目 录

第 1 章 函数、极限与连续	(1)
1.1 函数	(3)
1.2 极限	(13)
1.3 极限的运算	(22)
1.4 两个重要极限与无穷小的比较	(25)
1.5 函数的连续性	(31)
第 2 章 导数与微分	(40)
2.1 导数的概念	(42)
2.2 初等函数的导数	(49)
2.3 隐函数和由参数方程确定的函数求导	(55)
2.4 函数的微分及其应用	(59)
第 3 章 微分中值定理与导数的应用	(66)
3.1 微分中值定理	(68)
3.2 导数的应用	(71)
3.3 利用导数求极限——洛必达法则	(80)
第 4 章 不定积分	(87)
4.1 不定积分的概念与性质	(89)
4.2 换元积分法	(93)
4.3 分部积分法	(97)
* 4.4 几种特殊类型函数的积分	(100)
第 5 章 定积分及其应用	(109)
5.1 定积分	(111)
5.2 微积分基本公式	(118)
5.3 定积分的换元积分法与分部积分法	(121)
5.4 定积分的应用	(124)
* 5.5 广义积分	(130)
第 6 章 常微分方程	(139)
6.1 一阶微分方程	(141)

6.2	二阶常系数线性微分方程	(146)
第7章	向量代数与解析几何	(151)
7.1	向量及其线性运算	(153)
7.2	数量积与向量积	(157)
7.3	平面及其方程	(160)
7.4	空间直线及其方程	(163)
第8章	多元函数微积分	(168)
8.1	多元函数的极限与连续	(170)
8.2	偏导数	(175)
8.3	全微分	(179)
8.4	复合函数与隐函数的微分法	(183)
8.5	多元函数的极值及其应用	(187)
8.6	二重积分的概念与性质	(193)
8.7	直角坐标系下二重积分的计算	(196)
8.8	极坐标下二重积分的计算	(200)
第9章	无穷级数	(207)
9.1	常数项级数的概念和性质	(209)
9.2	常数项级数的审敛法	(214)
9.3	幂级数	(220)



资源索引目录



课中小测验答案

第 1 章

函数、极限与连续

学习目标与要求

- 理解初等函数的概念，掌握基本初等函数的图像及性质，会求函数的定义域，会判别函数的奇偶性，能用函数及其图像性质解决简单的实际问题；
- 了解反函数的求法及几种常见的数学模型；
- 理解极限、连续的概念，会分析判断函数的极限是否存在，会讨论函数的连续性；
- 掌握极限运算方法，会求各种类型的极限；
- 能够应用马克思主义哲学观点与唯物辩证法理解有限与无限间的关系。



学习目标与要求

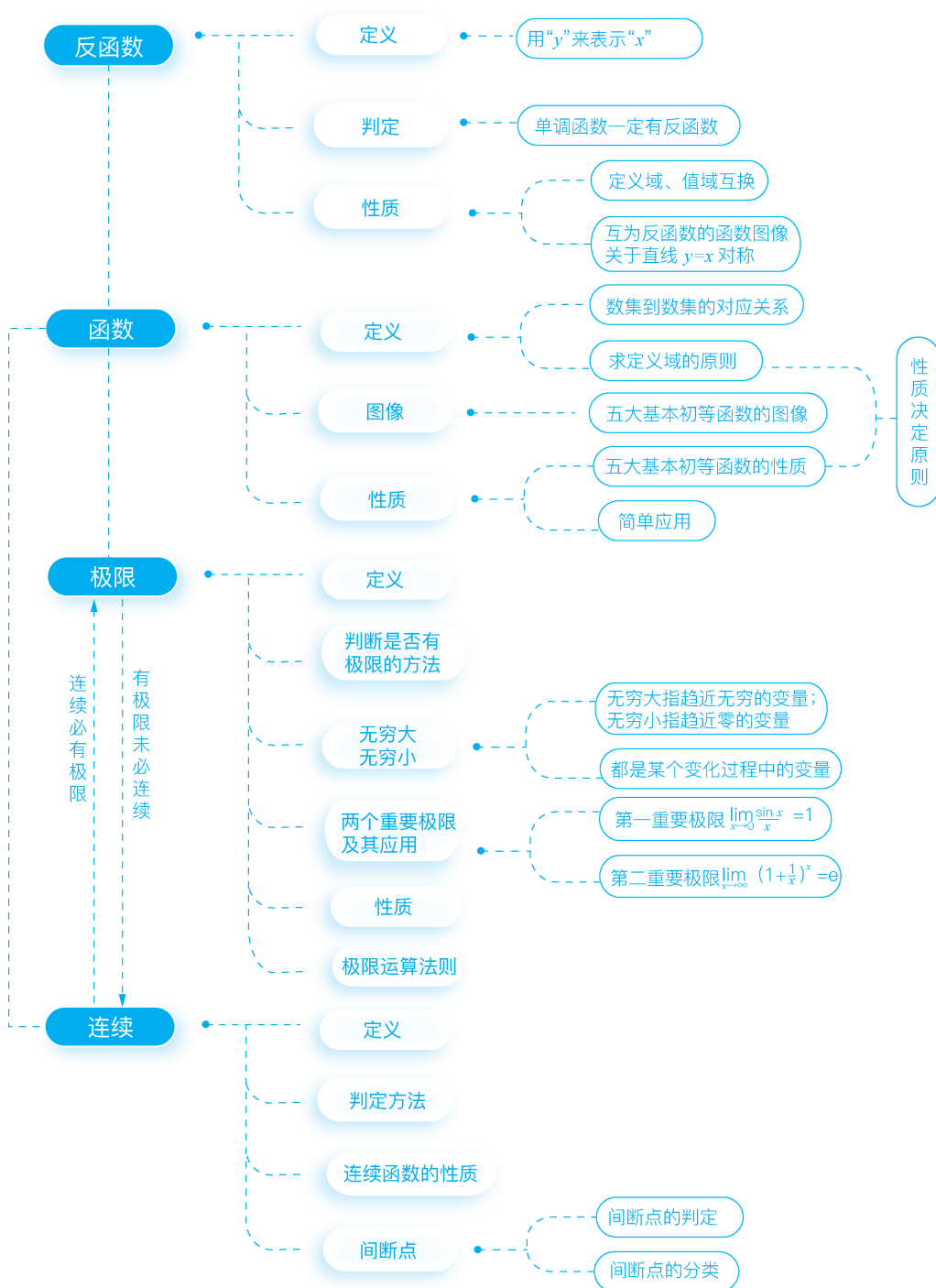
学前引入

回忆中学学过的函数的基本概念、基本初等函数的定义、图像及性质。

函数是指从一个非空数集到另一个非空数集的对应关系。中学时主要学习了常数函数、幂函数、指数函数、对数函数及三角函数五大类基本初等函数。它们都有哪些性质、它们的极限如何求、连续性如何判定等问题又是怎么解决的。让我们从函数的基本知识开始学起吧。



知识导图



1.1 函 数

1.1.1 集合»

1. 集合及运算

(1) 集合.

定义 1.1

我们常常研究某些事物组成的全体, 如一个班的学生、一批产品、全体正整数等, 这些事物组成的全体都是集合, 或者说, 某些指定的对象集在一起就成为一个集合, 简称集. 通常用大写的拉丁字母表示, 如 $A, B, C, \dots$ 构成集合的每个事物或者对象叫作这个集合的元素, 通常用小写的拉丁字母表示, 如 $a, b, c, \dots$

(2) 常用数集及记法.

非负整数集(自然数集): 全体非负整数的集合, 记作 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.正整数集: 非负整数集内排除 0 的集合, 记作 $\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$.整数集: 全体整数的集合, 记作 $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.有理数集: 全体有理数的集合, 记作 $\mathbf{Q} = \{\text{整数与分数}\}$.实数集: 全体实数的集合, 记作 $\mathbf{R} = \{\text{数轴上所有点所对应的数}\}$.

(3) 元素对于集合的隶属关系.

属于: 如果 a 是集合 A 的元素, 则称 a 属于 A , 记作 $a \in A$.不属于: 如果 a 不是集合 A 的元素, 则称 a 不属于 A , 记作 $a \notin A$.

(4) 集合中元素的特性.

确定性: 按照明确的判断标准, 给定一个元素, 它或者在这个集合里, 或者不在这个集合里, 不能模棱两可.

互异性: 集合中的元素没有重复.

无序性: 集合中的元素没有一定的顺序(通常用正常的顺序写出).

(5) 集合运算.

子集: 如果集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素, 则称集合 A 为集合 B 的子集, 记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$; 如果 $A \subseteq B$, 并且 $A \neq B$, 则称集合 A 为集合 B 的真子集, 记为 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$.

集合的相等: 如果集合 A, B 同时满足 $A \subseteq B, B \supseteq A$, 则 $A = B$.

补集: 设 $A \subseteq S$, 由 S 中不属于 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 S 的补集, 记为 $\complement_S A$.



集合的概念

交集：一般地，由所有属于集合 A 且属于 B 的元素构成的集合，称为 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$ 。

并集：一般地，由所有属于集合 A 或者属于 B 的元素构成的集合，称为 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$ 。

例 1 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$ 。

例 2 设 A 为某单位会英语的人的集合, B 为会日语的人的集合, 则 $A \cup B$ 表示会英语或会日语的人的集合, $A \cap B$ 表示既会英语又会日语的人的集合。

课中小测验



设 $A = \{x \mid -1 < x < 2\}$, $B = \{x \mid 1 < x < 3\}$, 求 $A \cup B$, $A \cap B$ 。



课中小测验

2. 区间与邻域

(1) 区间.

区间是常用的实数集. 设 a 和 b 都是实数, 且 $a < b$. 数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间, 记作 (a, b) , 即 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$, a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点.

数集 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$, 即 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$. a 和 b 称为闭区间 $[a, b]$ 的端点.

类似地定义: $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$, $[a, b)$ 和 $(a, b]$ 都称为半开半闭区间.

数 $b - a$ 称为以上区间的区间长度. 长度有限的区间称为有限区间.

同样定义无限区间: $[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$, $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$, $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$, $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$, $(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}$ (实数集).

(2) 邻域.

点 a 的某邻域, 通常是指数轴上以 a 为中心的开区间. 可做如下定义:

设 a, δ 为两个实数, $\delta > 0$, 则不等式 $|x - a| < \delta$ 的解集称为点 a 的 δ 邻域. 点 a 称为该邻域的中心, δ 称为该邻域的半径, 即点 a 的 δ 邻域就是以 a 为中心、以 δ 为半径的开区间 $(a - \delta, a + \delta)$.

若把邻域 $(a - \delta, a + \delta)$ 的中心点 a 去掉, 则称它为点 a 的去心 δ 邻域, 可表示为 $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$, 或 $0 < |x - a| < \delta$.

1.1.2 函数

专业案例

地球环境亟须改善，构建人类命运共同体，节约资源成了整个人类的重要任务。某市自来水公司为鼓励企业节约用水，按以下规定收取水费：若每户每月用水不超过40吨，则每吨水按1元收费，若每户用水超过40吨，则超过部分按每吨1.5元收费。另外，每吨用水加收0.2元的城市污水处理费。自来水公司收费处规定用户每两个月交一次用水费用（注：用水费用=水费+城市污水处理费）。

某企业每月用水都超过40吨，已知2022年三、四两个月一共交水费640元，试解决以下问题：

(1) 该企业三、四两个月共用水多少吨？

(2) 这两个月用水费用平均每吨多少元？

【思考】 利用数学知识，你会怎样解决这个问题？

【分析】 经济问题的实际应用。

(1) 根据相等关系：“三、四两个月用水费用=80+(三、四两个月共用水的吨数-80)×1.5+城市污水处理费”列方程求解即可。

(2) 这两个月用水费用平均每吨的钱数=三、四两个月一共交的水费÷三、四两个月共用水的吨数。

解：(1) 设该企业三、四两个月共用水 x 吨，

根据题意得 $80 + 1.5(x - 80) + 0.2x = 640$ ，

解得 $x = 400$ 。

(2) $640 \div 400 = 1.6$ (元)。

答：该企业三、四两个月共用水400吨。这两个月用水费用平均每吨1.6元。

1. 函数的概念

定义 1.2

设 x, y 是两个变量， D 是一个给定的非空数集，若对于每一个数 $x \in D$ ，按照某一确定的对应法则 f ，都有唯一确定的变量 y 与之对应，那么，我们就说 y 是 x 的函数，记作

$$y = f(x), x \in D$$

其中， x 称为自变量， y 称为因变量；自变量 x 的取值范围 D 称为函数的定义域，而因变量 y 的所有对应值的集合称为函数的值域。

【思考】 1. 以函数的实质为“关系”出发点，通过联系自己周边各种关系对比函数的概念。

2. 结合自身经历，勾勒自己的人生曲线，并分析其中的“自变量”和“因变量”。

函数的定义域和对应法则称为函数的两个要素。判断两个函数是否相同，即看两个

函数定义域和对应法则是否相同,而与其变量用什么字母表示无关,如 $y=x^2$, $s=t^2$ 为同一个函数;而 $y=\ln x^2$, $y=2\ln x$ 不是同一个函数.

若一个函数用数学式给出,定义域是指使表达式有意义的一切实数组成的集合.如:若函数表达式中有分式,则分母一定不等于零;若函数表达式中有偶次方根,则根号内的变量不能为负值;若函数表达式中有对数,则真数只能为正值,等等.

例如,函数 $f(x)=\sqrt{x-2}$ 的定义域是 $D=\{x \mid x-2 \geq 0\}=\{x \mid x \geq 2\}=[2, +\infty)$.

在解决实际问题时,还应结合实际意义来确定函数的定义域,如正方形的面积 S 是边长 x 的函数: $S=x^2$,边长值应为正值,所以其定义域为 $D=\{x \mid x > 0\}=(0, +\infty)$.

函数的表示方法有:解析法、图像法、列表法,其中最常用的是解析法.

课中小测验



求 $y=\sqrt{x-3}+\ln(5-x)$ 的定义域.



课中小测验

2. 函数的特性

(1)单调性:设函数 $y=f(x)$, $x \in I$,若对任意两点 $x_1, x_2 \in I$,当 $x_1 < x_2$ 时,总有

① $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的,区间 I 称为单调增加区间;

② $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的,区间 I 称为单调减少区间.

单调增加的函数和单调减少的函数统称为单调函数,单调增加区间和单调减少区间统称为单调区间.单调增加函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的,如图1.1所示;单调减少函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的,如图1.2所示.

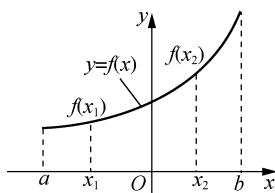


图 1.1

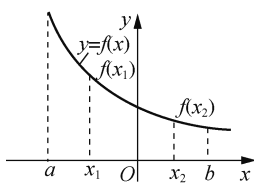


图 1.2

(2)奇偶性:设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称,如果对于定义域内的 x 都有

① $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为偶函数;

② $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的函数图像关于 y 轴对称,如图1.3所示;奇函数的函数图像关于原点对称,如图1.4所示.如果函数 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数,称为非奇非偶函数.



奇偶性定义

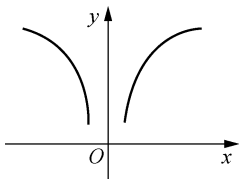


图 1.3

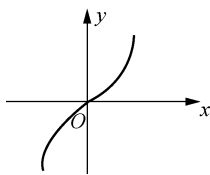


图 1.4



奇偶性

例如 $f(x)=x$, $f(x)=x^3$, $f(x)=\sin x$ 为奇函数; $f(x)=x^2$, $f(x)=\cos x$ 为偶函数.

例 3 判别函数 $f(x)=\ln \frac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性.

解 函数的定义域为 $\frac{1-x}{1+x} > 0$, 即 $-1 < x < 1$,

又因为 $f(-x)=\ln \frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln \frac{1+x}{1-x}=\ln \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\ln \frac{1-x}{1+x}=-f(x)$,

所以函数 $f(x)=\ln \frac{1-x}{1+x}$ 为奇函数.

课中小测验



函数 $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$ 的奇偶性为_____.

(3)有界性: 设函数 $y=f(x)$, $x \in D$, 如果存在一个正数 M , 使得对任意 $x \in D$, 均有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的; 如果这样的 M 不存在, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上是无界的, 即有界函数 $y=f(x)$ 的图像夹在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条直线之间.

例如, 函数 $y=\sin x$ 对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 存在正数 $M=1$, 恒有 $|\sin x| \leq 1$ 成立, 所以函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的; 而函数 $y=x^2$ 对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 不存在一个这样的正数 M , 使 $|x^2| \leq M$ 恒成立, 所以函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是无界的.

(4)周期性: 设函数 $y=f(x)$, $x \in D$, 如果存在常数 $T \neq 0$, 对任意 $x \in D$, 且 $x+T \in D$, $f(x+T)=f(x)$ 恒成立, 则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数, 称 T 是它的一个周期, 通常函数的周期是指其最小正周期. 例如, $y=\sin x$, $y=\cos x$, 周期 $T=2\pi$; $y=\tan x$, 周期 $T=\pi$.

3. 反函数

(1) 反函数的概念.

定义 1.3

设函数 $y=f(x)$, $x \in D$, $y \in M$ (D 是定义域, M 是值域). 若对于任意一个 $y \in M$, D 中都有唯一确定的 x 与之对应, 这时 x 是以 M 为定义域的 y 的函数, 称它为 $y=f(x)$ 的反函数, 记作 $x=f^{-1}(y)$, $y \in M$.

习惯上往往用 x 表示自变量, y 表示函数. 为了与习惯一致, 将反函数 $x=f^{-1}(y)$, $y \in M$ 的变量对调字母 x, y , 用 $y=f^{-1}(x)$, $x \in M$ 表示.

在同一直角坐标系下, $y=f(x)$, $x \in D$, 与反函数 $y=f^{-1}(x)$, $x \in M$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(2) 反函数存在性及求法.

定理 1.1 单调函数必有反函数, 且单调增加(减少)的函数的反函数也是单调增加(减少)的.

例如, 函数 $y=x^2$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上没有反函数 (它不是单调函数), 但在 $[0, +\infty)$ 上存在反函数. 由 $y=x^2$, $x \in [0, +\infty)$, 求得 $x=\sqrt{y}$, $y \in [0, +\infty)$, 再对调字母 x, y , 得其反函数为 $y=\sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$. 它们的图像关于直线 $y=x$ 对称. 如图 1.5 所示.

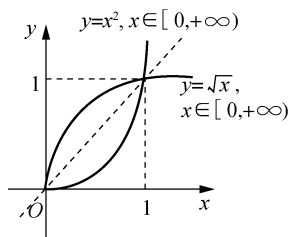


图 1.5

求函数 $y=f(x)$ 的反函数可以按以下步骤进行:

①从方程 $y=f(x)$ 中解出唯一的 x , 并用 $x=f^{-1}(y)$ 表示.

②将 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x, y 对调, 得到函数 $y=f^{-1}(x)$, 这就是所求函数的反函数.

4. 复合函数

在实际问题中, 有时两个变量间的联系不是直接的, 而是通过另一个变量联系起来的. 例如, 一个家庭贷款购房的能力 y 是其偿还能力 u 的平方, 即 $y=u^2$, 而这个家庭的偿还能力 u 是月收入 x 的 50%, 则这个家庭的贷款购房能力 y 与月收入 x 的关系可由两个函数: $y=f(u)=u^2$ 与 $u=g(x)=x \times 50\% = \frac{x}{2}$, 经过代入运算而得到, 即

$$y=f[g(x)]=f\left(\frac{x}{2}\right)=\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

这就是复合函数, 这种代入运算又称为复合运算. 一般地, 有如下定义.

定义 1.4

设两个函数 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, 与 x 对应的 u 值能使 $y=f(u)$ 有定义, 将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$, 得到函数 $y=f[\varphi(x)]$. 这个新函数 $y=f[\varphi(x)]$ 称为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数. $u=\varphi(x)$ 称为内层函数, $y=f(u)$ 称为外层函数, u 称为中间变量.

例如, 函数 $y=\sin u$ 与 $u=x^2+1$ 可以复合成复合函数 $y=\sin(x^2+1)$.

复合函数不仅可以由两个函数复合而成, 也可以由多个函数相继进行复合而成. 如函数 $y=u^2$, $u=\ln v$, $v=2x$ 可以复合成复合函数 $y=\ln^2(2x)$.

注意 不是任何两个函数都能复合成复合函数. 由定义可知, 只有当内层函数 $u=\varphi(x)$ 的值域与外层函数 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空时, 这两个函数才能复合成复合函数. 例如函数 $y=\ln u$ 和 $u=-x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为内层函数 $u=-x^2$ 的值域是 $(-\infty, 0]$, 而外层函数 $y=\ln u$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 显然, $(0, +\infty) \cap (-\infty, 0] = \emptyset$, 函数 $y=\ln(-x^2)$ 无意义.

例 4 指出下列复合函数的复合过程.

$$(1) y = \sin e^x; \quad (2) y = \ln \ln x; \quad (3) y = \tan^2 \frac{x}{2}.$$

解 (1) 令 $u=e^x$, 则 $y=\sin u$. 所以 $y=\sin e^x$ 是由 $y=\sin u$ 与 $u=e^x$ 复合而成.

(2) 令 $u=\ln x$, 则 $y=\ln u$. 所以 $y=\ln \ln x$ 是由 $y=\ln u$ 与 $u=\ln x$ 复合而成.

(3) 令 $v=\frac{x}{2}$, $u=\tan v$, 则 $y=u^2$. 所以 $y=\tan^2 \frac{x}{2}$ 是由 $y=u^2$, $u=\tan v$, $v=\frac{x}{2}$ 复合而成.

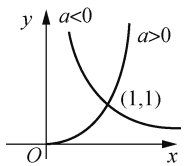
5. 初等函数

(1) 基本初等函数.

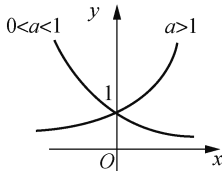
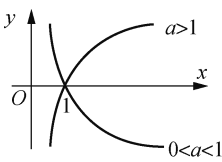
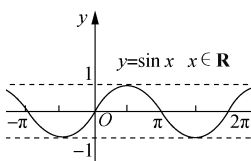
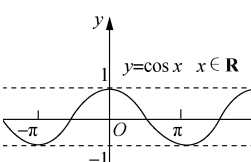
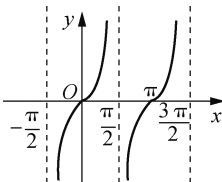
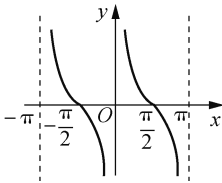
幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为基本初等函数.

为了便于应用, 下面就其图像和性质做简要的复习, 参见表 1.1.

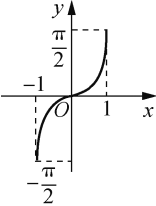
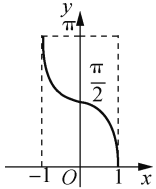
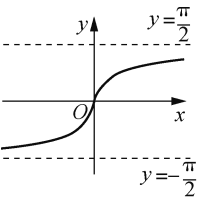
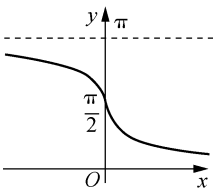
表 1.1 基本初等函数及图像性质

序 号	函 数	图 像	性 质
1	幂函数 $y=x^a (a \in \mathbf{R})$		在第一象限, $a>0$ 时函数单增; $a<0$ 时函数单减 共性: 都过点 $(1, 1)$

续表

序 号	函 数		图 像	性 质
2	指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)			$a > 1$ 时函数单增； $0 < a < 1$ 时函数单减 共性：过点 $(0, 1)$ ，以 x 轴为渐近线
3	对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)			$a > 1$ 时函数单增； $0 < a < 1$ 时函数单减 共性：过点 $(1, 0)$ ，以 y 轴为渐近线
4	三角函数	正弦函数 $y = \sin x$		奇函数，周期 $T = 2\pi$ ，有界， $ \sin x \leq 1$
		余弦函数 $y = \cos x$		偶函数，周期 $T = 2\pi$ ，有界， $ \cos x \leq 1$
		正切函数 $y = \tan x$		奇函数，周期 $T = \pi$ ，无界
		余切函数 $y = \cot x$		奇函数，周期 $T = \pi$ ，无界

续表

序 号	函 数	图 像	性 质
5	反正弦函数 $y = \arcsin x$		$x \in [-1, 1], y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 奇函数, 单调增加, 有界
	反余弦函数 $y = \arccos x$		$x \in [-1, 1], y \in [0, \pi]$, 单调减少, 有界
	反正切函数 $y = \arctan x$		$x \in (-\infty, +\infty), y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 奇函数, 单调增加, 有界, $y = \pm \frac{\pi}{2}$ 为两条水平渐近线
	反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$		$x \in (-\infty, +\infty), y \in (0, \pi)$, 单调减少, 有界, $y = 0, y = \pi$ 为两条水平渐近线

(2) 初等函数.

定义 1.5

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成的并能用一个式子表示的函数, 称为初等函数.

例如, 函数 $f(x) = 2^{\sqrt{x}} \ln(2x+5)$, $g(x) = \sqrt{\sin 2x} + e^{\arctan 3x}$ 等都是初等函数.

6. 分段函数与隐函数

分段函数: 函数用解析法表示时, 两变量间的对应法则有时候不能用一个解析式给出, 可能会出现对于自变量的某一部分数值, 对应法则用某一解析式, 对于另一部

分数值用另一解析式, 这种函数称为分段函数. 分段函数的定义域是各段函数取值范围的并集.

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 < x < 1 \\ 3x^2-2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \text{ 是分段函数, 其定义域为 } D = (-1, 1) \cup [1, 2] = (-1, 2].$$

显函数与隐函数: 一个函数如果能用 x 的具体表达式表示, 则称此函数为显函数, 如 $y = 2x + 3$, $y = e^{3x}$ 等是显函数; 如果函数是通过方程来确定的, 即函数 $y = f(x)$ 隐藏在方程 $F(x, y) = 0$ 中, 则称此函数为隐函数, 如由方程 $x + y^3 = 1$, $x^2 + y^3 - e^{x+y} = 3\sin y$ 等确定的函数为隐函数.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \sqrt{2x+4}; \quad (2) y = \frac{1}{x-3} + \sqrt{16-x^2};$$

$$(3) y = \ln(x^2 - 2x - 3).$$

2. 求下列函数的反函数.

$$(1) y = x^3 - 1; \quad (2) y = \sqrt{x+1}.$$

3. 写出下列函数的复合过程.

$$(1) y = \sin^2(x^3 + 1); \quad (2) y = \arctan(2x + 3).$$

4. 某省公布的居民用电阶梯电价听证方案如下:

第一档	第二档	第三档
月用电量 210 度以下, 每度电价格为 0.52 元	月用电量 210 度至 350 度, 每度电价格比第一档提价 0.05 元	月用电量 350 度以上, 每度电价格比第一档提价 0.30 元

若某户月用电量 400 度, 则需交电费多少元?



习题 1.1 答案



第 1(2) 小题

【学海拾贝】

第三次数学危机——“理发师悖论”



理发师悖论

1.2 极 限

1.2.1 数列的极限

引例 我国战国时代(前 475—前 221)哲学家庄周所著的《庄子·天下》里有这样的记载：“一尺之捶，日取其半，万世不竭。”此话的意思是：一根一尺长的棍子，第一天取一半，第二天取剩下部分的一半，以后每天都取剩下部分的一半，这个过程可以无限地进行下去。用数学语言来描述，就是第一天剩下 $\frac{1}{2}$ ，第二天剩下 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$ ，第三天剩下 $\frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3}$ ，



数列的极限

……，第 n 天剩下 $\frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$ ，……。很显然，每一天剩下的长度构成一个数列：

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

进一步观察，当天数 n 无限增大时，一尺长的棍子所剩无几了，即所剩下的长度 $\frac{1}{2^n}$ 无限趋近于零。把天数 n 无限增大时，长度 $\frac{1}{2^n}$ 无限趋近于零，记为 $n \rightarrow \infty$ (读作 n 趋于无穷大) 时， $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ (读作 $\frac{1}{2^n}$ 趋近于零)。

【典故】

刘徽：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”

【思考】 学习以上典故，根据所学知识，写下上述典故中涉及的数学知识及自己对典故的理解。

类似地，观察下列数列的变化趋势。

(1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

(2) $\{3\}$: $3, 3, 3, \dots, 3, \dots$

(3) $\{(-1)^n\}$: $-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$

(4) $\left\{\frac{1+(-1)^n}{n}\right\}$: $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \dots$

(5) $\{n^2\}$: $1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$

通过分析可以得知，数列(1)、(4)无限地趋近于 0；数列(2)无限地趋近于 3；数列(3)总是在 -1 和 1 之间跳动；数列(5)，当 n 逐渐增大时， $y_n = n^2$ 也越来越大，变化趋势是趋于无穷大。

对数列的这一现象，给出如下定义。

定义 1.6

对于数列 $\{y_n\}$, 当 n 无限增大 ($n \rightarrow \infty$) 时, y_n 无限趋近于一个确定的常数 A , 则称 A 为 n 趋于无穷大时数列 $\{y_n\}$ 的极限 (或称数列收敛于 A), 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \quad \text{或} \quad y_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty).$$

此时, 也称数列 $\{y_n\}$ 的极限存在; 否则, 称数列 $\{y_n\}$ 的极限不存在 (或称数列是发散的).

根据定义, 上面引例中给出的数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$, 它的极限是 0, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$. $y_n = n^2$ 的变化趋势是趋于无穷大, 这时也说数列 $\{n^2\}$ 的极限是无穷大, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$.

课中小测验



讨论数列 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}, \{(-3)^n\}$ 的极限, 并总结规律.



课中小测验

例 1 讨论数列 $y_n = q^n$ 的极限情况.

解 当 $q = 1$ 时, $y_n = 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$;

当 $q = -1$ 时, 由上述数列 (3) 知, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ 不存在;

当 $|q| < 1$, $n \rightarrow \infty$ 时, $y_n = q^n \rightarrow 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$;

当 $|q| > 1$, $n \rightarrow \infty$ 时, $y_n = q^n$ 的绝对值是趋于无穷大的, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ (不存在).

$$\text{综上所述, } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \text{不存在}, & q = -1 \\ \infty, & |q| > 1 \end{cases}.$$

1.2.2 函数的极限

专业案例 游戏销售

当推出一种新的电子游戏程序时, 短期内销售量会迅速增加, 然

后开始下降, 销量的函数为 $s(t) = \frac{200t}{t^2 + 100}$,

t 为月份.

(1) 请计算游戏推出后第 6 个月、第 12 个月和第三年的销售量;

(2) 如果要对该产品的长期销售做出预测, 请建立相应的表达式.



函数的极限

解 (1)

$$s(6) = \frac{200 \times 6}{6^2 + 100} = \frac{1200}{136} \approx 8.8235,$$

$$s(12) = \frac{200 \times 12}{12^2 + 100} = \frac{2400}{244} \approx 9.8361,$$

$$s(36) = \frac{200 \times 36}{36^2 + 100} = \frac{7200}{1396} \approx 5.1576.$$

(2) 从上面的数据可以看出, 随着时间的推移, 该产品的长期销售应为时间 $t \rightarrow \infty$ 时的销售量, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{200t}{t^2 + 100} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{200t}{t^2}}{\frac{t^2 + 100}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{200}{t}}{1 + \frac{100}{t^2}} = 0.$$

上式说明当时间 $t \rightarrow +\infty$ 时, 销售量的极限为 0, 即人们购买此游戏会越来越少, 从而转向购买新的游戏.

通过以上分析, 可以看出, 销售极限是一个动态的过程, 主要体现在以下几个方面:

1. 当 x 的绝对值无限增大 (记为 $x \rightarrow \infty$) 时, 函数 $f(x)$ 的极限

数列是一种特殊形式的函数, 把数列极限的定义推广, 可以给出函数极限的定义.

例如, 函数 $f(x) = \frac{1}{x} + 1$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 无限趋近于常数 1,

如图 1.6 所示.

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x) = \frac{1}{x} + 1 \rightarrow 1$, 则称常数 1 为 $x \rightarrow \infty$ 时函数

$f(x) = \frac{1}{x} + 1$ 的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = 1.$$

一般地, 有如下定义.

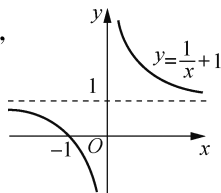


图 1.6

定义 1.7

设函数 $y=f(x)$, 当 x 的绝对值无限增大($x \rightarrow \infty$)时, 函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A , 则称常数 A 为 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty).$$

此时也称极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在; 否则, 称极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在.

需要说明的是, 这里的 $x \rightarrow \infty$, 指的是 x 沿着 x 轴向正负两个方向趋于无穷大. x 取正值且无限增大, 记为 $x \rightarrow +\infty$, 读作 x 趋于正的无穷大; x 取负值且绝对值无限增大, 记为 $x \rightarrow -\infty$, 读作 x 趋于负的无穷大, 即 $x \rightarrow \infty$ 同时包含 $x \rightarrow +\infty$ 和 $x \rightarrow -\infty$.

根据定义 1.7, 不难得出下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} c = c (c \text{ 为常数}).$$

在研究实际问题的过程中, 有时只需考查 $x \rightarrow +\infty$ 或 $x \rightarrow -\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限情形, 因此, 只需将定义 1.7 中的 $x \rightarrow \infty$ 分别换成 $x \rightarrow +\infty$ 或 $x \rightarrow -\infty$, 即可得到 $x \rightarrow +\infty$ 或 $x \rightarrow -\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限的定义, 分别记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$

注意 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 都存在且相等, 即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

例 2 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 与 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$ 是否存在?

解 由表 1.1 可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x \neq \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在;

同理, 因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$ 不存在.

极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的几何意义: 若极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$) 存在, 则称直线 $y = A$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线. 例如, 如图 1.6 所示, 因为极限

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = 1$, 所以直线 $y = 1$ 是曲线 $y = \frac{1}{x} + 1$ 的水平渐近线. 又如, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, 所以直线 $y = -\frac{\pi}{2}$ 与 $y = \frac{\pi}{2}$ 是曲线 $y = \arctan x$ 的两条水平渐近线.

2. 当 $x \rightarrow x_0$ (读作 x 趋近于 x_0) 时, 函数 $f(x)$ 的极限

首先考查当 x 无限趋近于 1 时, 函数 $f(x) = 2x + 1$ 的变化趋势.

如图 1.7 所示, 可以直观地看出, 当 x 从左右两侧无限地趋近于 1 时, 函数 y 从上下两侧无限地趋近于 3, 即当 $x \rightarrow 1$ 时, $f(x) = 2x + 1 \rightarrow 3$, 则称 3 为 $x \rightarrow 1$ 时函数 $f(x) = 2x + 1$ 的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3.$$

一般地, 有如下定义:

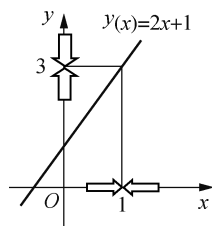


图 1.7

定义 1.8

设函数 $y = f(x)$, 当 x 无限地趋近于 x_0 (但 $x \neq x_0$) 时, 函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A , 则称 A 为当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0).$$

这时也称极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 否则称极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在.

由定义 1.8, 易得下列函数的极限:

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$;
- (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ (c 为常数).

由于 $x \rightarrow x_0$, 同时包含了 $\begin{cases} x \rightarrow x_0^- & (\text{从 } x_0 \text{ 的左侧趋近于 } x_0) \\ x \rightarrow x_0^+ & (\text{从 } x_0 \text{ 的右侧趋近于 } x_0) \end{cases}$ 两种情况, 则把

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 称为 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 称为 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限.

定义 1.9

如果自变量 x 仅从小于(或大于) x_0 的一侧趋近于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A , 则称 A 为当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左(右)极限, 记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0^- \\ (x \rightarrow x_0^+)}} f(x) = A.$$

根据定义 1.8 和定义 1.9, 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与它的左右极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0^- \\ (x \rightarrow x_0^+)}} f(x) = A$ 有如下

关系:

极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在且等于 A 的充分必要条件是左极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在且等于 A , 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

例 3 考查下列函数当 $x \rightarrow 1$ 时, 极限 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 是否存在?

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}; \quad (2) f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}; \quad (3) f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

解 (1) 因为 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ (当 $x \neq 1$ 时),

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

(2) 该函数为分段函数, $x = 1$ 为分段点, 因为在 $x = 1$ 的两侧函数的解析式不一样, 所以考查极限 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 时, 必须分别考查它的左右极限.

$$\left. \begin{aligned} \text{左极限 } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \\ \text{右极限 } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

(3) 该函数也为分段函数, $x = 1$ 是分段点.

因为左极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2$, 右极限 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$, 左右极限都存在但不相等, 即 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, 所以极限 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在.

说明 ① 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是否存在, 与函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处是否有定义无关.

② 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点处的左右两侧解析式不相同, 考查极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 必须先考查它的左右极限. 如分段函数在分段点处的极限问题.

课中小测验



已知分段函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1 \\ -x, & x > -1 \end{cases}$, 讨论极限 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.



课中小测验

1.2.3 无穷小与无穷大

【古诗】

送孟浩然之广陵

李白

故人西辞黄鹤楼,
烟花三月下扬州。

孤帆远影碧空尽，

唯见长江天际流。

【思考】 1. 请有感情地朗读以上古诗，感受当时的意境，并将小船在越走越远过程中大小的变化描述出来。

2. 你知道类似的场景或例子吗？和同学们分享一下吧！

1. 无穷小与无穷大的概念

定义 1.10

极限为零的变量称为无穷小量，简称无穷小。也可以这样描述：在自变量的某种变化过程中，变量 $f(x)$ 的极限值是零，则称变量 $f(x)$ 为在该变化过程中的无穷小。例如：

因为极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ，所以变量 $\frac{1}{x}$ 是 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小；因为极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ ，所以变量 $\sin x$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小；因为极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ ，所以变量 $x-1$ 是 $x \rightarrow 1$ 时的无穷小。

值得注意的是：

(1) 判断一个变量是否为无穷小，除了与变量本身有关外，还与自变量的变化趋势有关。如上例，变量 $y = x-1$ ，当 $x \rightarrow 1$ 时为无穷小；而当 $x \rightarrow 2$ 时， $y \rightarrow 1$ ，极限是一个非零常数。因而，不能笼统地称某一变量为无穷小，必须明确指出变量在何种变化过程中是无穷小。

(2) 在实数中，因为 0 的极限是 0，所以数 0 是无穷小，除此之外，即使绝对值很小很小的常数也不是无穷小。

有了无穷小的概念，自然会联想到无穷大的概念，什么是无穷大呢？

定义 1.11

绝对值无限增大的变量称为无穷大量，简称无穷大，即若 $\lim f(x) = \infty$ ，则称 $f(x)$ 为该变化趋势下的无穷大。

例如，如图 1.8 所示，当 $x \rightarrow 1$ 时， $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 是无穷大，即

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty.$$

从图像上看，当 $x \rightarrow 1$ 时，曲线 $y = \frac{1}{x-1}$ 向上向下都无限延伸且越来越接近直线 $x=1$ ，通常称 $x=1$ 是函数 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 的无穷间断点，直线 $x=1$ 是曲线 $f(x) = \frac{1}{x-1}$

的垂直(直线 $x=1$ 垂直于 x 轴)渐近线.

再如, 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$, 所以当 $x \rightarrow \infty$ 时变量 x^2 是无穷大.

与无穷小类似, 一个变量是否为无穷大, 与自变量的变化过程有关. 不能笼统地说某一变量为无穷大, 必须明确指出变量在何种变化过程中是无穷大, 也不能把一个绝对值很大的常数说成无穷大.

由上例不难看出, 在同一变化过程中, 无穷大的倒数是无穷小, 非零的无穷小的倒数是无穷大.

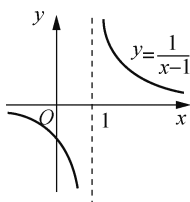


图 1.8

2. 无穷小与函数极限的关系

定理 1.2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$.

即具有极限的函数与它的极限值之间相差的仅仅是一个无穷小量. 在此, 不予以证明. 另外该定理对 $x \rightarrow \infty$ 时也是成立的.

3. 无穷小的性质

对同一变化过程中的无穷小与有界函数, 它们具有下列性质:

性质 1 有限个无穷小的代数和是无穷小.

性质 2 有限个无穷小的乘积是无穷小.

性质 3 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 常数与无穷小的乘积是无穷小.

例 4 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, x 是无穷小, 而 $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$, 因此, $x \sin \frac{1}{x}$ 仍为无穷小, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

课中小测验



求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x}$.

习题 1.2



习题 1.2 答案

1. 填空题.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \pi = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$2. \text{ 设函数 } f(x) = \begin{cases} |x|, & x < 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$



第 2 题

试讨论在 $x=0$ 处和 $x=1$ 处函数 $f(x)$ 的极限是否存在?

3. 在传播学中有这样一个规律: 在一定条件下, 谣言的传播可以用下面的函数关系来表示

$$p(t) = \frac{1}{1 + a e^{-kt}}$$

$p(t)$ 表示的是 t 时刻人群中知道这个谣言的人数比例, 其中 a 与 k 都是正数.

求 $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$.

【学海拾贝】

兔子能追上乌龟吗?



兔子能追上乌龟吗

1.3 极限的运算

1.3.1 极限的四则运算法则

定理 1.3 (四则运算法则) 设在同一变化过程中, $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 则

$$(1) \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B.$$

$$(2) \lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB,$$

特别有,

$$(i) \lim [Cf(x)] = C \lim f(x) = CA (C \text{ 为常数});$$

$$(ii) \lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n = A^n (n \text{ 为正整数}).$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \text{ (其中 } B \neq 0 \text{)}.$$

极限符号 $\lim$ 的下边不标明自变量的变化过程, 意思是说对 $x \rightarrow x_0$ 或 $x \rightarrow \infty$ 所建立的结论都成立.

说明 ① 运用法则求极限时, 参与运算的函数必须有极限, 否则将会得到错误的结论.

② 法则(1)和(2)均可以推广到有限个函数的情形.

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 3)$.

解 根据法则(1)和(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 3) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 2x + \lim_{x \rightarrow 2} 3 = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 2} x + 3 \\ &= (\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 2 \times 2 + 3 = 2^2 - 2 \times 2 + 3 = 3. \end{aligned}$$

由此例可知, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 多项式 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ 的极限值就是这个多项式在点 x_0 处的函数值, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n) = a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x_0 + a_n.$$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x^2+5}$.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x^2+5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (2x+1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+5)} = \frac{2 \times 2 + 1}{2^2 + 5} = \frac{5}{9}.$$

对于有理分式函数 $F(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, 其中 $p(x)$, $q(x)$ 均为 x 的多项式, 并且

$\lim_{x \rightarrow x_0} q(x) \neq 0$ 时, 要求 $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)}$, 只需将 $x = x_0$ 代入即可.

以上例题在进行极限运算时, 都直接使用了极限的运算法则. 但有些函数做极限运算时, 不能直接使用法则.

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x^2-4}$.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 2} (2x+1) = 5 \neq 0$, 故 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{2x+1} = 0$, 由无穷小与无穷大的关系得

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x^2-4} = \infty.$$

当 $x \rightarrow 2$ 时, 分母的极限为零, 在这里不能直接运用商的极限法则.

例 4 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$.



例 4

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+9)-9}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+9}+3} = \frac{1}{6}$.

当分子分母的极限均为零时, 这类极限称为“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式, 不能直接运用商的极限法则. 先要对函数进行变形整理(分解因式或者有理化), 当 $x \rightarrow a$ 时, 必有 $x \neq a$, 所以可以先约去零因式 $x-a$ (极限为零的因式称为零因式), 化为非“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式再求极限.

例 6 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2+1}{3x^2+5x-2}$.

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2+1}{3x^2+5x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{4+0}{3+0-0} = \frac{4}{3}$.

例 7 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+1}{3x^2+5x-2}$.

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+1}{3x^2+5x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{0+0}{3+0-0} = 0$.

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+3x}{3x^2+5}$.

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+3x}{3x^2+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+\frac{3}{x}}{3+\frac{5}{x^2}} = \infty$.

当分子分母的极限均为 ∞ 时, 这类极限称为“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式. 一般采用分子分母同除以分母中变化最快的量(即分母的最高方幂)的方法来转化, 使分母的极限存在, 并且不为零, 然后运用法则运算.

综上所述可得结论:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n=m \\ 0, & n < m \\ \infty, & n > m \end{cases} \quad (n, m \in \mathbf{N}, a_0 \neq 0, b_0 \neq 0).$$

课中小测验



根据上面的结论求下列极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+3}{x^2+5}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+3}{2x^3+5}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+3}{x^4+5x-2}$.

例 9 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$.

解 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x-2}{1-x^2} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x} = -\frac{1}{2}.$

此类极限称为“ $\infty - \infty$ ”型未定式, 不能直接运用和差的极限法则, 需要将函数变形.

例 10 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{1+x^2} - x)$.

解
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{1+x^2} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

此题属于“ $0 \cdot \infty$ ”型未定式, 需要将函数变形.

例 11 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.

解 把 $\frac{\sin x}{x}$ 看作 $\sin x$ 与 $\frac{1}{x}$ 的乘积. 当 $x \rightarrow \infty$ 时 $\frac{1}{x}$ 为无穷小, 而 $|\sin x| \leq 1$, 根据无穷小与有界量的乘积仍为无穷小, 得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

1.3.2 复合函数的极限

定理 1.4 (复合函数的极限) 设函数 $y = f[\varphi(x)]$ 是 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而

成的复合函数. 若 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = A$.

特别地, 当 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$ 时, 则极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f(u_0)$, 此时又可写为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)]$, 即在一定条件下可以交换函数与极限的运算次序.

例 12 求 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x}$.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, $\lim_{u \rightarrow 0} e^u = e^0 = 1$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \sin x} = e^0 = 1.$$

习题 1.3



习题 1.3 答案

求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 5}{2x^3 + 3x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x^2 - 3};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right).$$



第(5)小题

1.4

两个重要极限与无穷小的比较

1.4.1 两个重要极限



两个重要极限

极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 称为第一重要极限.

因为 $\frac{\sin x}{x}$ 是偶函数, 即 $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, 所以, 只需讨论 $x \rightarrow 0^+$ 时的情形.

计算 $\frac{\sin x}{x}$ 得表 1.2.

表 1.2 $\frac{\sin x}{x}$ 数值表

x	$\frac{\sin x}{x}$
1	0.841 471
0.3	0.985 067
0.2	0.993 347
0.1	0.998 334
0.05	0.999 583
0.02	0.999 933
0.01	0.999 983
0.009	0.999 986
0.000 5	0.999 999

由表 1.2 可知, 当 $x(x>0)$ 取值越趋近于 0 时, 则相应的 $\frac{\sin x}{x}$ 的取值越趋近于 1,

直观上可以得到 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

解 令 $3x = u$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $u \rightarrow 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \times 3 \right) = 3 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 3 \times 1 = 3.$$

在这里有必要强调一下, 第一重要极限具有两个特征:

(1) 它是“ $\frac{0}{0}$ ”型.

(2) 分子中记号 $\sin$ 后面的表达式与分母的表达式形式上完全相同.

今后只要遇到符合上述两个特征的极限, 可以不引入中间变量, 直接使用下面的公式即可. 也就是说, 将极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 中的自变量 x 换成 x 的函数 $\varphi(x)$, 公式仍然成立, 即

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1, \quad x \rightarrow a \text{ 时}, \varphi(x) \rightarrow 0.$$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \times 1 = 1.$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

例 4 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sin(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \cdot (x + 1) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 \times 2 = 2. \end{aligned}$$

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} \cdot \frac{3}{5} \right) = 1 \times 1 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$

课中小测验

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}.$$

2. 第二重要极限

极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ 称为第二重要极限.

数 e 是一个无理数, $e = 2.718\ 281\ 828\ 459 \dots$, 它是一个十分重要的常数, 无论在科学技术中, 还是在经济领域都有许多应用. 例如, 树木的增长规律、人口增长的模型、物品的衰减模型, 以及复利问题等.

首先, 将数列 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 的值列成表 1.3, 观察其变化规律.

表 1.3 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 数值表

n	1	2	3	4	5	10	100	1 000	10^4	10^5	10^6	...
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	2	2.250	2.370	2.441	2.488	2.594	2.705	2.717	2.718	2.718 268	2.718 280	...

由表 1.3 可知, 这个数列是单调递增的, 其增加速度越来越慢, 趋于稳定. 即极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 是存在的(理论上不再给予证明), 通常用字母 e 表示这个极限值, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

第二重要极限具有两个特征:

(1) 当 n 无限增大时, 函数 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 呈“ 1^∞ ”型.

(2) 括号内是 1 加一个极限为零的变量, 第一项是 1, 第二项是括号外指数的倒数.

例 6 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$.

解 因为 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{2}{n} \rightarrow 0$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2} \times 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2 = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2 = e^2.$$

通常使用第二重要极限公式求极限时, 不需要引入中间变量, 只需将指数的变量凑成底数中第二项的倒数与一个常数(或极限存在的变量)的乘积.

实际上, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ 可以推广到函数 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, 即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

如果令 $t = \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow 0$, 则有公式

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

综上所述, 符合上述两个特征的极限均为 e , 即

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)} = e, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty,$$

或

$$\lim_{x \rightarrow a} (1 + \varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0.$$

例 7 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x \times (-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1} = e^{-1}.$

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{3x} \times 3} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^3 = e^3.$

例 9 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$.

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{\left(1 - \frac{3}{x}\right)^x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{-\frac{x}{3} \times (-3)}} = \frac{e}{e^{-3}} = e^4.$

课中小测验



$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+3} \right)^x.$$

1.4.2 无穷小的比较



极限为零的变量为无穷小量，而不同的无穷小趋近于零的“快慢”是不同的。例如，当 $x \rightarrow 0$ 时， x^2 ， x^3 都是无穷小，很显然 $x^3 \rightarrow 0$ 比 $x^2 \rightarrow 0$ 快。无穷小的比较为了刻画这种快慢程度，引入无穷小阶的概念。

定义 1.12

设 α 和 β 是同一变化过程中的两个无穷小，即 $\lim \alpha = 0$ ， $\lim \beta = 0$ ，且 $\alpha \neq 0$ 。

(1) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ ，则称 β 是 α 的高阶无穷小，记为 $\beta = o(\alpha)$ ；

(2) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ ，则称 β 是 α 的低阶无穷小；

(3) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$ ，则称 β 与 α 是同阶无穷小。

特别地，当 $C=1$ ，即 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ 时，称 β 与 α 是等价无穷小，记为 $\alpha \sim \beta$ ，读作 α 等价于 β 。

例 10 当 $x \rightarrow 0$ 时，比较下列各组无穷小。

(1) $1 - \cos 2x$ 与 x^2 ；

(2) $\ln(1+x)$ 与 x 。

解 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = 2$ ，所以，当 $x \rightarrow 0$ 时， $1 - \cos 2x$ 与 x^2 是同阶无穷小。

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$ ，所以，当 $x \rightarrow 0$ 时， $\ln(1+x) \sim x$ 。

等价无穷小具有一条很重要的性质：

定理 1.5 (等价无穷小的替换性质) 在自变量的同一变化过程中，若 $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ 均为无穷小，且 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ ，则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$ 。

在极限的运算中，可以使用该定理简化计算。

为了使读者尽快掌握和使用这一性质，下面给出一些常用的等价无穷小：

当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$(1) \sin x \sim x; \quad (2) \tan x \sim x; \quad (3) \arcsin x \sim x;$$

$$(4) 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2; \quad (5) \ln(1+x) \sim x; \quad (6) e^x - 1 \sim x;$$

$$(7) \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n} \cdot x.$$

例 11 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\ln(1+2x)}.$

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \rightarrow 0$, $e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x$, $\ln(1+2x) \sim 2x$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\ln(1+2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

例 12 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}.$

解 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

一般地, 等价无穷小代换不能用于和差运算. 例如:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0, \text{ 显然, 这种解法是错误的.}$$

习题 1.4

求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\tan 2x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{x}};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^x;$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x;$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x)}{\sin 3x};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x} - 1) \tan x}{1 - \cos 2x}.$$



习题 1.4 答案



第(8)小题

1.5

函数的连续性

1.5.1 连续性 >>



连续性

【故事】

从前有一个农夫，嫌自己田里的秧苗长得太慢，因此整天忧心忡忡。有一天，他又荷着锄头下田了，他觉得秧苗似乎一点也没长大，于是苦苦思索有什么办法可以使秧苗长高一点。忽然，他灵机一动，毫不犹豫地卷起裤管就往水田里跳，开始把每一棵秧苗拉高一点。

傍晚，农夫完成他自以为聪明的“杰作”，得意扬扬地跑回家，迫不及待地告诉他妻子：“告诉你一件了不起的事，我今天想到一个好点子，让咱们田里的秧苗长高了不少。”农夫妻子半信半疑，就叫儿子到田里去看究竟是怎么回事。儿子听到家里的秧苗长高了，就跑到田里去看。这时，他发现秧苗是长高了，但是却都低垂着头，已经枯萎了……

【思考】 1. 读完以上故事，你有什么感悟？和同学们分享一下吧！

2. 根据所学知识，指出该故事和函数的联系。

1. 函数连续性的概念

如图 1.9 所示，曲线 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上由点 A 到点 B 能一笔画出来，则称这条曲线为连续曲线。

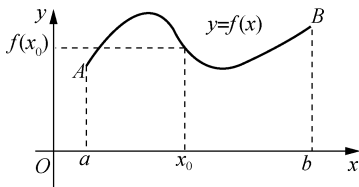


图 1.9

设变量 u 从它的初值 u_0 改变到终值 u_1 ，终值与初值之差 $u_1 - u_0$ 称为变量 u 在 u_0 点处的增量(或改变量)，记作

$$\Delta u = u_1 - u_0.$$

注意 增量 Δu 可以为正值、负值，也可以为零。

对函数 $y=f(x)$ ，当自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx ，即 x 是由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ 时，此时函数 $f(x)$ 相应的从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0 + \Delta x)$ ，则 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的相应增量，记作 Δy ，即

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

定义 1.13

(点连续) 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 若当自变量 x 在点 x_0 处的增量 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 相应的函数增量 $\Delta y \rightarrow 0$, 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续. 如图 1.10 所示.

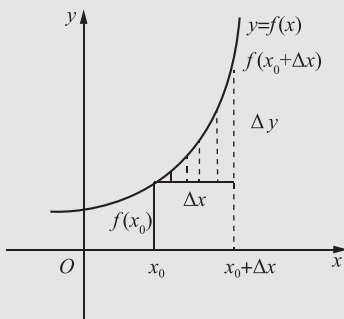


图 1.10

若记 $x = x_0 + \Delta x$, 则 $\Delta x = x - x_0$, 显然, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $x \rightarrow x_0$, 所以极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

可以改写为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0,$$

即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

因此, 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续有等价于定义 1.13 的另一定义.



连续性的定义

定义 1.14

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续. 如图 1.11 所示.

由定义 1.14 可知, 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续必须满足三个条件:

- (1) 函数值 $f(x_0)$ 存在.
- (2) 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在.
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.



连续性的三个条件

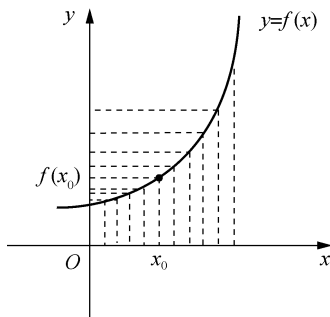


图 1.11

例 1 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$. 试讨论 $f(x)$

在点 $x=1$ 处是否连续?

解 由题设知, $f(1)=3$, 又 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$,

但 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \neq f(1)$, 所以函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续.

有时需要讨论函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的左极限与右极限情形. 如果左极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续; 如果右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

根据定义 1.14 不难推导出, 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处既左连续也右连续.

例 2 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ x^2+2, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处的连续性.



例 2

解 因为 $f(1)=2 \times 1 + 1 = 3$, 又 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+1) = 3 = f(1)$, 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处左连续; 又 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+2) = 3 = f(1)$, 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处右连续. 所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a, b) 上的每一点都连续, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上连续; 如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a, b) 上连续, 且在左端点 a 处右连续, 右端点 b 处左连续, 则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续. 此时称函数 $f(x)$ 为区间 (a, b) (或 $[a, b]$) 上的连续函数, 区间 (a, b) (或 $[a, b]$) 称为函数的连续区间.

1.5.2 函数的间断点

定义 1.15

(间断点) 如果曲线 $y=f(x)$ 不能一笔画出来, 在 x_0 点处断开, 则称这条曲线不连续, $x=x_0$ 点为曲线 $y=f(x)$ 的间断点. 即定义 1.14 中的三个条件至少有一条不满足的点称为间断点.

间断点主要分为两类:

(1) x_0 左右极限都存在, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在, 称 x_0 为第一类间断点.

①若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, 即极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, 或者 $f(x)$ 在 x_0 处无定义, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

②若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在, 称 x_0 为第二类间断点.

第二类间断点中, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$), 则称点 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点. 此时直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

例 1 中, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \neq f(1) = 3$, 所以 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的可去间断点. 此时只要改变 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的函数值, 令 $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处就连续了.

再如, 函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, 在 $x=1$ 处没有定义, 所以 $x=1$ 为间断点. 而

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2,$$

故 $x=1$ 是 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 的可去间断点.

此时, 只要补充定义 $f(1)=2$, 则它就在 $x=1$ 处连续了.

实际上, 若 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点, 只要补充定义或者改变定义, 即令 $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 就可使 $f(x)$ 在 x_0 处由间断变为连续, 这也正是“可去”的含义.

例 3 设函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$, 求间断点, 并说明其类型.

解 这里 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$, 显然

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

所以 $x=0$ 是跳跃间断点, 如图 1.12 所示.

例如, 函数 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在,

所以 $x=0$ 是它的第二类间断点.

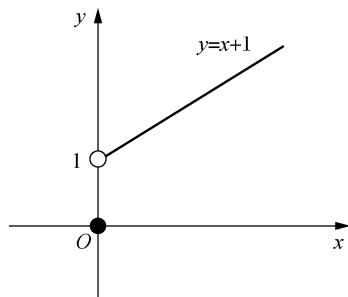


图 1.12

例 4 设函数 $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$, 求函数间断点,

并说明其类型.

解 因为 $x = \pm 1$ 时函数没有意义, 所以 $x = \pm 1$ 为它的间断点;

又因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x+1} = \infty,$$

所以, $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, $x=-1$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

1.5.3 初等函数的连续性

可以证明,基本初等函数在其定义域内都是连续的.

定理 1.6(四则运算法则) 如果函数 $f(x)$, $g(x)$ 在点 x_0 处连续,则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0) \neq 0$) 在点 x_0 处也连续.

定理 1.7(复合函数的连续性) 如果函数 $u=g(x)$ 在点 x_0 处连续, $g(x_0)=u_0$, 而且函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 处连续,则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x_0 处连续,即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f[g(x_0)].$$

定理 1.8(反函数的连续性) 设函数 $y=f(x)$ 在某区间上连续,且单调增加(减少),则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在对应的区间上连续且单调增加(减少).

定理 1.9(初等函数的连续性) 初等函数在其定义区间上连续.

该结论为求初等函数的极限提供了一个简便的方法,只要 x_0 是初等函数 $f(x)$ 定义区间内的一点,则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

即将函数的极限运算转化为求函数值的问题.

例如,极限 $\lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2+1}$, 因为 $x=1 \in D=(-\infty, +\infty)$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2+1} = e^{1^2+1} = e^2.$$

1.5.4 闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数具有下列性质:

定理 1.10(最值定理) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必能取得最大值和最小值,也就是说存在 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 使 $f(x_1)=M$, $f(x_2)=m$, 且对任意的 $x \in [a, b]$, 都有 $m \leq f(x) \leq M$, 如图 1.13 所示.

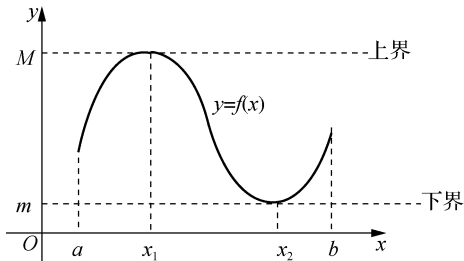


图 1.13

需要强调的是,函数在闭区间 $[a, b]$ 上连续是其具有最大最小值的充分条件,但不必要;另外,开区间上的连续函数不一定有最大值和最小值.如 $y=x$ 在区间 $(0, 1)$ 上就没有最大值和最小值.

定理 1.11(有界定理) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上

有界.

与上述性质一样, 函数在闭区间 $[a, b]$ 上连续是其有界的充分而不必要条件. 开区间上的连续函数不一定有界.

定理 1.12 (介值定理) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, M 和 m 分别为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, 则对于任何介于 m 和 M 之间的常数 c , $[a, b]$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = c$, 如图 1.14 所示.

推论 (零点定理) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$. 如图 1.15 所示.

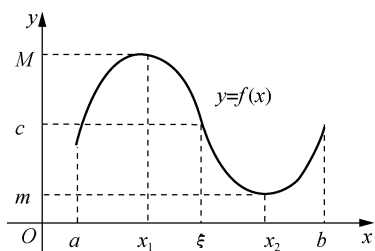


图 1.14

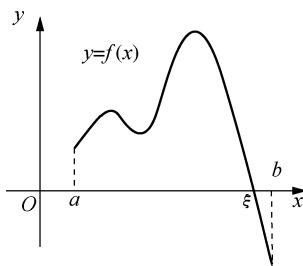


图 1.15



零点定理

例 5 证明方程 $e^{2x} - x - 2 = 0$ 至少有一个小于 1 的正实根.

证 设 $f(x) = e^{2x} - x - 2$, 区间 $[a, b] = [0, 1]$, 显然函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续.

又因为 $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = e^2 - 3 > 0$, $f(0) \cdot f(1) < 0$, 根据零点定理, 则至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f(\xi) = 0$, 故方程 $e^{2x} - x - 2 = 0$ 至少有一个小于 1 的正实根.

基于零点定理, 得到求函数零点近似解的一种计算方法——二分法, 即对于在区间 $[a, b]$ 上连续, 且满足 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 的函数 $f(x)$, 通过不断地把函数 $f(x)$ 的零点所在的区间二等分, 使区间的两个端点逐步逼近零点, 进而得到零点近似值的方法.

习题 1.5



习题 1.5 答案

1. 填空题.

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 且 $f(x_0) = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) + 2] = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 函数 $f(x) = \frac{x+5}{x^2+4x-5}$ 的连续区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 其间断点是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 其中可去间断点是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 无穷间断点是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin kx}{2x}, & x < 0 \\ (2x+3)^2, & x \geq 0 \end{cases}$, 则常数 k 为何值时该函数为连续



第2题

函数.

【本章小结】

一、主要知识点

函数、基本初等函数、初等函数、极限、无穷小与无穷大、无穷小的比较、函数连续性与间断点.

二、主要数学思想和方法

1. 函数的思想.

函数思想是用运动和变化的观点、集合与对应的思想, 去分析和研究数学问题中的数量关系, 建立函数关系或构造函数, 去分析问题、转化问题, 从而使问题获得解决.

2. 极限思想.

极限思想是指用极限概念分析问题和解决问题的一种数学思想, 是近代数学的一种重要思想. 简单地说极限思想即是用无限逼近的方式从有限中认识无限, 用无限去探求有限, 从近似中认识精确, 用极限去逼近准确, 从量变中认识质变的思想.

三、主要题型及解法

1. 求函数定义域.

2. 求复合函数的复合过程.

3. 求极限.

四则运算法则: “ $\frac{0}{0}$ ”型, 先消去分子分母中共同的零因子; “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型, 同除以分母中变化最快的量. 复合函数的极限, 两个重要极限, 有界量与无穷小的乘积仍为无穷小, 等价无穷小的替换, 函数的连续性定义.

4. 求函数在一点处的连续性: 利用连续定义的三个条件, 逐一验证.

5. 求函数的间断点及间断点类型: 初等函数的间断点处在使得函数无意义的点; 分段函数的间断点可能在分段点处. 根据间断点处左右极限的情况对间断点进行分类.

复习题 1

1. 选择题.

(1) 下列函数中不能复合成复合函数的一组是().

- A. $y = u^2$ 与 $u = -3x^2 + 2$ B. $y = \sqrt{u}$ 与 $u = -3x^2 + 2$
C. $y = \ln u$ 与 $u = -2 - x^2$ D. $y = \sin u$ 与 $u = -3x^2 - 2$

(2) 设 $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$, 则函数 y 的定义域为().

- A. $(-2, 3]$ B. $(-2, -1) \cup (-1, 3]$
C. $[-3, 3]$ D. $(-2, 1) \cup (1, 3]$

(3) 函数 $f(x) = x^2 \sin x$ 是().

- A. 奇函数 B. 偶函数
C. 有界函数 D. 周期函数

(4) 函数 $y = \frac{x-1}{x+1}$ 的反函数为().

- A. $y = \frac{x-1}{x+1}$ B. $y = \frac{1-x}{1+x}$
C. $y = \frac{x+1}{x-1}$ D. $y = \frac{1+x}{1-x}$

(5) 设 $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$ ().

- A. 0 B. 1
C. -1 D. 不存在

(6) 下列式子中错误的是().

- A. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ B. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 0$
C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2. 填空题.

(1) 函数 $y = e^{\sin 2x}$ 是由 _____, _____, _____ 复合而成的.

(2) 函数 $y = \ln(1-x^2)$ 的定义域是 _____ (用区间表示).

(3) 函数 $y = x^2 - \cos x$ 是 _____ (填“奇”“偶”“非奇非偶”)函数.

(4) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}+5} =$ _____.

(5) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{3x}, & x < 0 \\ b, & x = 0 \\ \frac{3\ln(1+x)}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 在 $x=0$ 处连续, 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$,

$b = \underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-2x-3}$ 的间断点有 $\underline{\hspace{2cm}}$, 其中, $\underline{\hspace{2cm}}$ 是可去间断点, $\underline{\hspace{2cm}}$ 是无穷间断点.

(7) 若 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 $\alpha = e^{Ax} - 1$ 与 $\beta = \sin 2x$ 等价, 则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 计算题.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^x$;

(2) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+x-6}{x^2-9}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6}{x^2-9} - \frac{1}{x-3} \right)$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x}-1)\sin 2x}{\ln(1+x^2)}$.



复习题1答案



专升本真题演练