

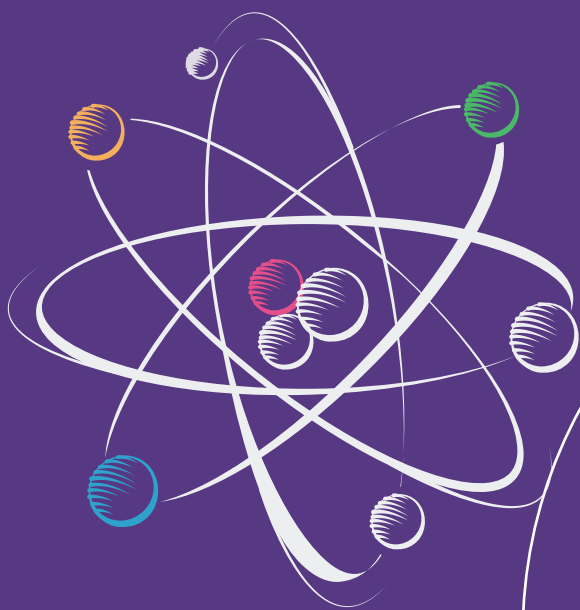
黑龙江省“十四五”职业教育规划教材

职业教育新形态一体化教材

GAILÜLUN

概率论

主 编 张学珍



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



黑龙江省“十四五”职业教育规划教材

职业教育新形态一体化教材

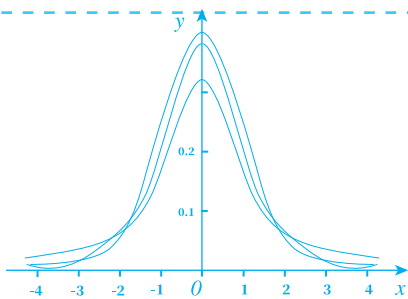
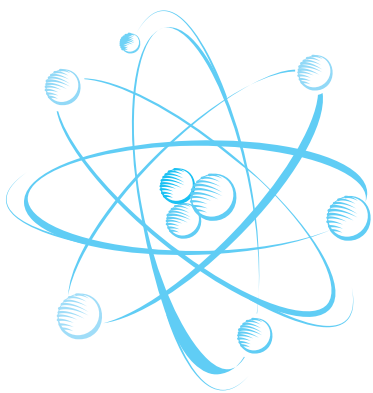
GAILÜLUN

概率论

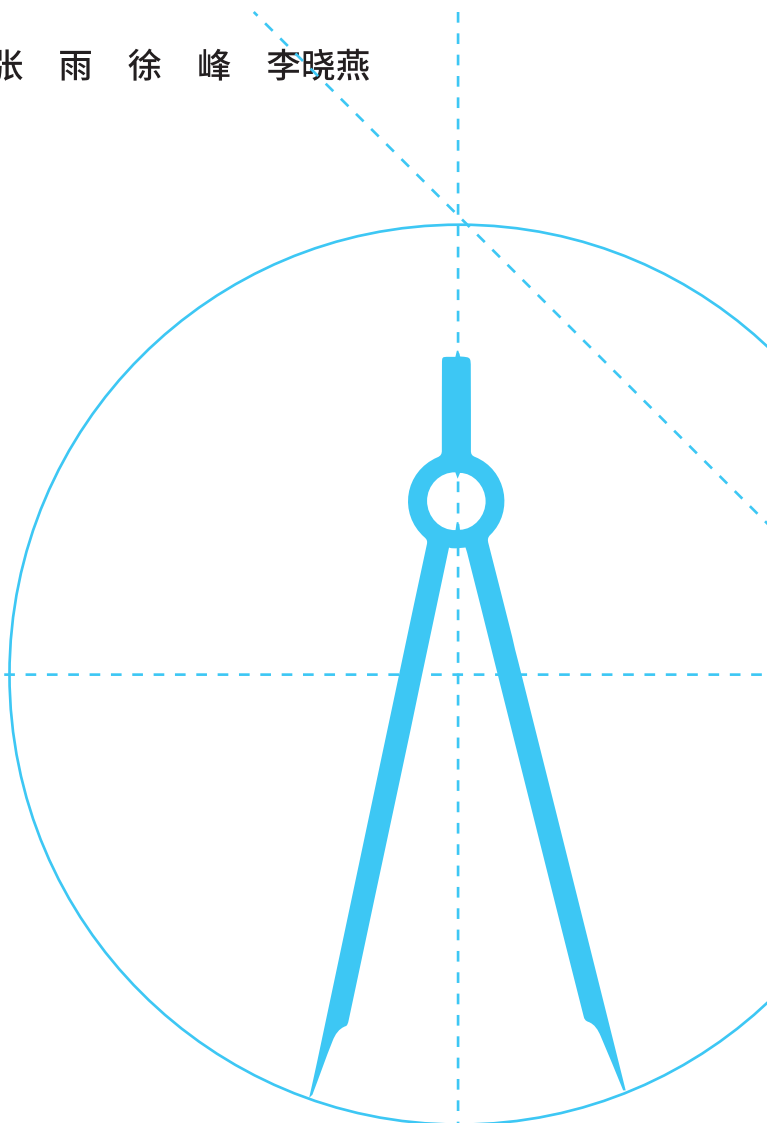
主 编 张学珍

副主编 姜 晓 闫从蓉 张 雨 徐 峰 李晓燕

编 者 陈亚鑫 于文浩



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



内 容 简 介

本教材在选材上以高职院校的实际情况为基础,注重培养学生的基本运算能力,注重理论联系实际,着重培养学生分析和解决实际问题的能力。本教材共分为6章,主要内容有随机事件及其概率、一维随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的函数及其分布、随机变量的数字特征,以及大数定律与中心极限定理。

图书在版编目(CIP)数据

概率论/张学珍主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2024.5(2025.10 重印)

ISBN 978-7-5767-1426-5

I.①概… II.①张… III.①概率论-高等职业教育-教材 IV.①O211

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2024)第 096164 号

策划编辑 李艳文 范业婷

责任编辑 李佳莹

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 天津市蓟县宏图印务有限公司

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 11 字数 281千字

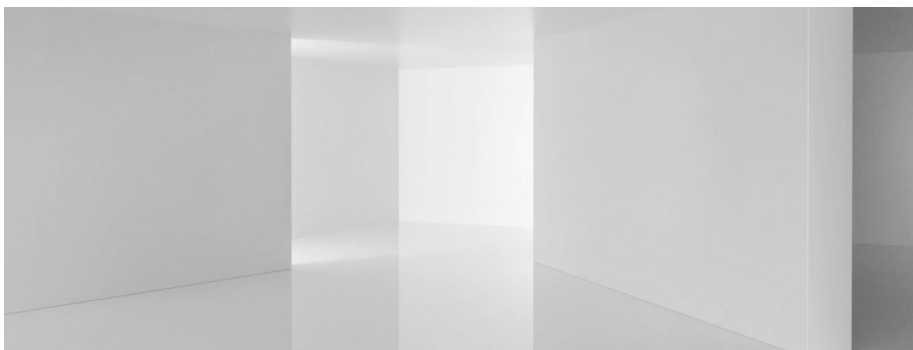
版 次 2024年5月第1版 2025年10月第2次印刷

书 号 ISBN 978-7-5767-1426-5

定 价 36.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

Preface 前言



党的二十大报告中明确指出，教育、科技、人才是全面建设社会主义现代化国家的基础性、战略性支撑，强调要“深入实施科教兴国战略、人才强国战略、创新驱动发展战略”。在数字经济蓬勃发展的背景下，概率论作为数学领域的重要分支，既是支撑大数据、人工智能等领域的核心工具，也是培养新时代高素质技术技能人才必备的数学工具。本教材立足高职教育，以习近平新时代中国特色社会主义思想为指导，贯彻党的二十大精神，聚焦职业教育“为党育人、为国育才”的使命，系统构建符合数字时代需求的概率论课程体系。

本教材以“理论与实践并重，知识传授与价值引领相结合”为编写理念，深度对接职业标准与岗位需求。通过调研全国高职院校，结合一线教师反馈，本教材在编写中重构了知识框架与呈现方式：基础理论夯实数学思维根基，行业应用包括会计电算化、管理、投资理财、国际贸易、连锁经营等专业典型案例，技术赋能融入 Python 编程实践，形成“理论夯实—案例解析—技术应用”的递进式教学逻辑，助力学生掌握概率论的基本原理与方法，为专业学习与职业发展奠定基础。

本教材特色如下：

1. 思政引领，价值渗透

将课程思政融入教学全过程，通过概率论在金融风控、商业决策等方面的运用，潜移默化培养学生的职业使命感与社会担当。

2. 产教融合，案例驱动

结合财经商贸领域真实场景设计教学内容，如引入医疗诊断等专业案例，引导学生理解条件概率的实际意义，强化专业实践能力。

3. 技术赋能，岗课融通

创新性融入 Python 编程实践模块，设置交互式代码窗口与模拟试验，通过数据分析、概率可视化等操作，实现从理论推导到技术应用的完整链路，提升学生数据分析与编程能力。此外，各章节配有微课二维码，助力教学创新与学生自主学习。

4. 分层递进，多元评价

构建“基础训练—综合应用—拓展创新”三级习题体系，并配备知识结构图、案例选讲、在线真题测试等多元化学习资源，满足不同层次学生的学习需求，达到“学练测考”梯度式学习。

本教材力求内容全面、结构清晰、形式多样、注重实用，旨在为学生提供一本高质量的概率论学习指南，培养学生严谨、科学的逻辑思维方式，使其能够从随机现象中洞察规律，逐步提升运用概率知识解决实际问题的能力。

编者团队深知教材建设是一项长期工程，诚挚欢迎全国职业教育同仁共同完善本教材内容，使本教材成为助力学生成长成才、服务行业转型升级的优秀载体，为培养更多适应数字经济发展需求的高素质技术技能人才贡献力量！



思政引领,
价值渗透



产教融合,
案例驱动



技术赋能,
岗课融通



分层递进,
多元评价

编者

Contents 目录

01 第一章 随机事件及其概率

- 第一节 样本空间与随机事件 / 2
- 第二节 随机事件的概率及其性质 / 9
- 第三节 条件概率与全概率公式 / 15
- 第四节 事件的独立性 / 22

02 第二章 一维随机变量及其分布

- 第一节 随机变量及其分布函数 / 34
- 第二节 离散型随机变量 / 39
- 第三节 连续型随机变量 / 50

03 第三章 二维随机变量及其分布

- 第一节 二维随机变量及其分布函数 / 66
- 第二节 二维随机变量的边缘分布 / 74
- 第三节 二维随机变量的条件分布 (选讲)
/ 81

04 第四章 随机变量的函数及其分布

- 第一节 一维随机变量的函数及其分布 / 94
- 第二节 二维随机变量的函数及其分布 / 99

05 第五章 随机变量的数字特征

- 第一节 数学期望 / 115
- 第二节 方差 / 123
- 第三节 协方差及相关系数 / 128
- 第四节 随机变量的其他特征数 / 133

06 第六章 大数定律与中心极限定理

- 第一节 大数定律 / 147
- 第二节 中心极限定理 / 151

附录 A 泊松(Poisson)分布表 / 166

附录 B 标准正态分布数值表 / 169

参考文献 / 170

第一章

随机事件及其概率

01



本章导读

本章主要由自然界和实际生产生活中存在的现象,引出随机现象和随机事件的基本概念,进而引出样本空间,讨论事件之间的关系,提出概率的统计定义,并说明概率的相关性质,分析两种基本概型——古典概型和几何概型及其概率的计算,并在此基础上,提出条件概率的概念,讨论全概率公式和贝叶斯公式,分析什么是事件的独立性.



本章知识结构图



本章目标

知识目标:

- 1.掌握随机事件的概念及表示,掌握事件的包含、相等、和事件、积事件、互不相容、对立事件的概念,简单应用和事件、积事件、对立事件的概念.
- 2.理解概率的定义,掌握概率的性质,理解古典概型、几何概型的定义,能简单应用古典概型、几何概型进行概率计算.
- 3.了解条件概率的概念,会用乘法公式进行有关概率的计算,会用全概率公式与贝叶斯公式进行计算.
- 4.理解事件独立性的概念,掌握事件独立性的概率计算.

素质目标:

- 1.通过分析随机事件及其概率,培养逻辑推理能力和抽象思维能力.
- 2.通过解决概率问题,培养分析问题、解决问题的能力.
- 3.通过概率的学习,帮助理解数据的不确定性和随机性,培养数据分析和解读能力.
- 4.通过试验和模拟,激发对随机现象的好奇心和探究欲望.
- 5.学会利用马克思主义哲学观点和唯物辩证法分析问题.

第一节

样本空间与随机事件



引例 1

个人发展规划

进入大一第一学期,在学习大学生职业发展与就业指导课程时,老师经常要求学生在性格、能力测试分析的基础上,做出今后的人生职业规划,请问如何看待这方面的问题.

问题分析:规划是结合目前状况做出的,但是在大学学习期间,由于每个人的付出不一样,学习能力不一样,将导致今后发展结果与现在的规划有很多不同.可以说,我们的成长过程中充满了“变数”.

在自然界和人类生产生活中存在着两类不同的现象.一种是确定性现象,就是在满足某条件的情况下必然发生的现象.比如,“向上抛一石子,必然下落”“在平面几何中,三角形内角之和必然等于 180° ”等.另一种是不确定性现象,是即使满足某种条件,可能发生也可能不发生的现象,称为随机现象.比如,“抛一枚硬币,是出现正面还是反面”“掷一枚骰子,观察出现的点数”“同一门火炮向同一目标射击,各次着弹点不尽相同,无论怎样控制射击条件,在一次射击之前无法预测着弹点的确切位置”“保险公司承担某项保险业务,其收益如何”等.可以看到,在我们所生活的世界上,无论是抛硬币、掷骰子、玩扑克等简单的机会游戏,还是复杂的社会现象;从婴儿的诞生,到世间万物的繁衍生息;从流星坠落,到大自然的千变万化,都充满了大量的不确定性和随机性.

概率论与数理统计就是寻求随机现象发生的可能性,研究与揭示随机现象统计规律性,对这种可能性的大小给出度量方式及算法的一门数学学科.

一、随机试验与样本空间

人们在经过长期实践和深入研究后发现,随机现象虽然从每次试验或观察结果来看,具有不确定性,但在大量重复试验或观察下它的结果却呈现出了某种规律性.

法国数学家布丰(Buffon)、英国统计学家皮尔逊(Pearson)、英国统计学家费歇尔(Fisher)等曾经将一枚硬币反复抛掷,观察出现正反面的次数,他们发现:当抛掷的次数越来越多时,出现正面的频率 $n_{\text{正}}/n$ 越来越向 0.5 靠近,呈现出一定的规律性.其试验数据见表 1.1.

表 1.1 抛掷硬币试验数据

学 者	抛掷次数(n)	正面出现次数($n_{\text{正}}$)	频率($\frac{n_{\text{正}}}{n}$)
布丰	4 040	2 048	0.506 9
费歇尔	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	24 000	12 012	0.505

(一) 随机试验 E

满足下列条件的就称为随机试验:

- (1) 可以在相同条件下重复进行的.
- (2) 事先知道试验的多种可能结果的.
- (3) 每次试验可能出现不同的结果,但最终出现哪种结果,试验之前不能确定的.

随机试验是产生随机现象的过程,我们就是通过随机试验来研究随机现象的,通过随机试验,人们可以揭示自然界的奥秘.

(二) 样本空间 Ω

随机试验的每一个可能结果,称为随机试验的基本事件,为了便于研究随机试验,将随机试验 E 的所有基本事件的全体所构成的集合称为随机试验的样本空间 Ω ,样本空间 Ω 中的元素就是随机试验 E 的基本事件,称为样本点 ω .

例 1.1 试写出下列随机试验的样本空间.

E_1 : 抛掷一枚硬币,观察出现正面还是反面.

E_2 : 抛掷一枚质地均匀的骰子,观察出现的点数.

E_3 : 有一口袋中装有黑、白两种颜色的小球,从袋中任取一球,观察其颜色.

E_4 : 记录某地一昼夜的温度情况.

E_5 : 测量在 0 和 1 之间取值的两个物理量 x 和 y 的数值(不含 0 和 1).

E_6 : 记录一段时间某地区 110 报警次数.

解: E_1 有 2 个基本事件,即出现正面,出现反面.

故

$\Omega_1 = \{\text{正面}, \text{反面}\}.$

E_2 有 6 个基本事件,即出现 1 点,2 点,3 点,4 点,5 点,6 点.

故

$\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$

E_3 有 2 个基本事件,即取到黑球,取到白球.

故

$\Omega_3 = \{\text{黑球}, \text{白球}\}.$

E_4 的基本事件有无数个,介于最高温度和最低温度之间.

故

$\Omega_4 = \{x \mid T_L \leq x \leq T_H\}.$

其中, T_L 和 T_H 分别表示该地区的最低温度和最高温度.

E_5 的基本事件有无数个, (x, y) 的 x 和 y 均介于 0 到 1 之间.

故

$$\Omega_5 = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

E_6 的基本事件为出现 0 次报警, 1 次报警, 2 次报警, 3 次报警, ……

故

$$\Omega_6 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

二、随机事件的概念

随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集, 用大写字母 A, B, C 等表示, 简称事件. 事件是概率论中最为基本的概念, 能够将所关心的事件正确地表示出来, 是学习概率论的最基本的要求.

事件分为基本事件和复合事件, 随机试验中的每一个可能的结果就是基本事件, 它是最简单的随机事件, 不可再分; 由若干个基本事件组合而成的事件就是复合事件, 也称复杂事件. 比如, 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数的随机试验中, 可能结果为 $\{\text{出现 1 点}\}, \{\text{出现 2 点}\}, \dots, \{\text{出现 6 点}\}$, 这些都是基本事件; 而 $\{\text{出现偶数点}\}, \{\text{出现大于 2 的点}\}$, 这些就是复合事件. 由于随机事件是由基本事件组成的, 或者是由基本事件复合而成的, 因此, 在引入样本空间 Ω 以后, 可以看到讨论随机试验 E 的事件实际上就是讨论样本空间 Ω 的子集, 当且仅当子集中的一个样本点发生.

为了便于更好地讨论随机现象, 探索其规律, 把每次试验都必然发生的事件称为必然事件, 记为 Ω . 比如, 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数的随机试验中, $\{\text{出现 1 到 6 点}\}$; 把每次试验都不可能发生的事件称为不可能事件, 记为 $\emptyset$. 比如, 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数的随机试验中, $\{\text{出现 7 点}\}$.

三、事件之间的关系与运算

概率论的重要任务之一就是研究随机事件的统计规律性, 特别需要通过对简单事件的讨论去把握复杂事件的规律, 下面就介绍事件的关系与运算.

(一) 事件的关系与运算

用集合表示事件后, 可以用集合论的观点来描述、解释和论证事件之间的关系和事件的运算, 见表 1.2.

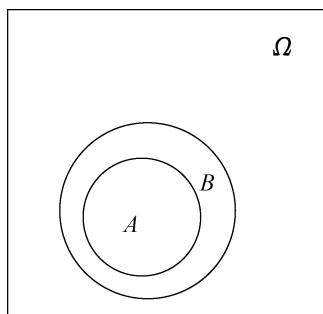
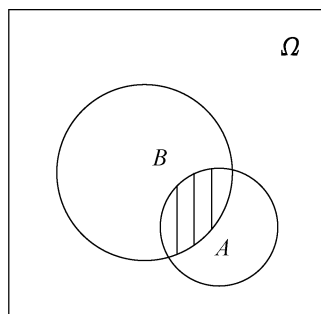
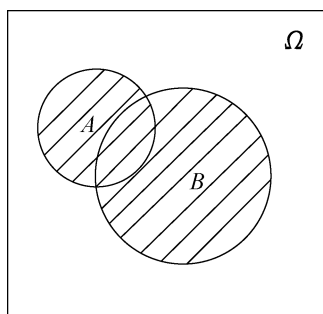
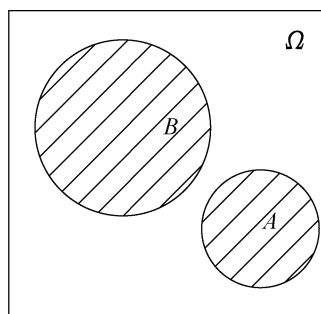
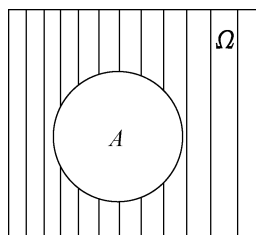
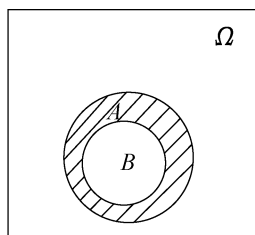
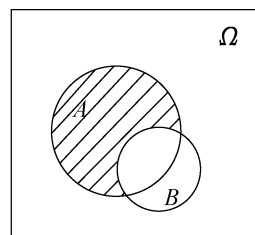
表 1.2 集合表示事件

符 号	表示的事件	意 义	集合解释
Ω	必然事件	所有基本事件组合成的事件	全集
$\emptyset$	不可能事件	不可能发生的事件	空集
$\{\omega\}$	基本事件	不可分解的事件	单元素集
$A = \Omega$	事件 A	试验的可能结果	全集 Ω 的子集
$A \subset B$	包含关系	事件 A 发生必然导致 B 发生	A 中的元素必属于 B
$A = B$	相等关系	组成 A, B 的基本事件一样	集合相等
$A \cup B$ 或 $A + B$	事件的并(和)	A 与 B 至少有一个发生的事件	并集
$A \cap B$ 或 AB	事件的交(积)	A, B 同时发生的事件	交集

续表

符 号	表示的事件	意 义	集合解释
$A \cap B = \emptyset$	互不相容	A, B 不能同时发生	A 与 B 没有公共元素
$\bar{A}$	事件 A 的逆(对立事件)	事件 A 不发生, A 与 $\bar{A}$ 互逆	A 的补集

事件间的关系可用平面上的阴影部分表示(图 1.1~图 1.6),集合的运算律均适用于事件的运算.

图 1.1 $A \subset B$ 图 1.2 $A \cap B$ 图 1.3 $A \cup B$ 图 1.4 $A \cap B = \emptyset$, 互不相容图 1.5 $\bar{A}$ 图 1.6 $A - B$ 

(二)事件的运算性质

(1)交换律: $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$.

(2)结合律: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

(3)分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(4) 德摩根律(对偶律): $\overline{A \cup B} = \overline{A} \overline{B}, \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

对多个事件的情形同样有 $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}, \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$.

下列等式也可证明成立:

$A \cup A = A, A \cup \Omega = \Omega, A \cup \emptyset = A, A \cap A = A, A \cap \Omega = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A - B = A - AB = A \overline{B}, A \cup B = A \cup B \overline{A} = A \overline{B} \cup B$.

例 1.2 对试验事件的关系证明: $(A \cup B) - AB = (A \overline{B}) \cup (\overline{A} B)$.

证明: $(A \cup B) - AB = (A \cup B) \cap (\overline{AB}) = (A \cap \overline{AB}) \cup (B \cap \overline{AB})$
 $= (A \cap (\overline{A \cup B})) \cup (B \cap (\overline{A \cup B})) = (A \overline{A \cup B}) \cup (B \overline{A \cup B})$
 $= (A \overline{B}) \cup (\overline{A} B)$

例 1.3 在大数据快速发展的今天,利用 Python 软件仿真掷一枚骰子进行试验,观察出现的点数.事件 A 表示“出现奇数点”; B 表示“出现的点数小于 5”; C 表示“出现小于 5 的偶数点”.用集合的列举法表示下列事件: $\Omega, A, B, C, A \cup B, A \cap B, B \cup C, \overline{C}$.

解: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A = \{1, 3, 5\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$; $C = \{2, 4\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $A \cap B = \{1, 3\}$; $B \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$; $\overline{C} = \{1, 3, 5, 6\}$.

例 1.4 为了保证产品质量,从一批产品中每次取出 1 件产品进行检验(每次取出的产品不放回),事件 A_i 表示“第 i 次取到合格品”($i = 1, 2, 3$).试用事件的运算符号表示下列事件:

- (1) {3 次都取到了合格品}.
- (2) {3 次中至少有 1 次取到了合格品}.
- (3) {3 次中恰好有 2 次取到了合格品}.
- (4) {3 次中最多有 1 次取到了合格品}.

解: (1) “3 次都取到了合格品”表示 A_1, A_2, A_3 这 3 个事件同时发生,所以 {3 次都取到了合格品} $= A_1 A_2 A_3$.

(2) “3 次中至少有 1 次取到了合格品”表示 A_1, A_2, A_3 这 3 个事件至少有 1 个发生,所以 {3 次中至少有 1 次取到了合格品} $= A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

(3) “3 次中恰好有 2 次取到了合格品”表示 A_1, A_2 合格且 A_3 不合格,或 A_1, A_3 合格且 A_2 不合格,或 A_2, A_3 合格且 A_1 不合格,所以 {3 次中恰好有 2 次取到了合格品} $= A_1 A_2 \overline{A_3} \cup A_1 \overline{A_2} A_3 \cup \overline{A_1} A_2 A_3$.

(4) “3 次中最多有 1 次取到了合格品”表示 3 次中只有 1 次取到合格品或全取到非合格品,也就是至少有 2 次取到非合格品,所以 {3 次中最多有 1 次取到了合格品} $= \overline{A_1} \overline{A_2} \cup \overline{A_1} \overline{A_3} \cup \overline{A_2} \overline{A_3}$.

• 编探概率 •

生日悖论:在一个 23 人的房间里,至少有两个人同一天生日的概率超过 50%。

目标:Python 验证在一个 23 人的群体中,至少两人生日相同的概率超过 50%。

Python

```
import random

def has_duplicate_birthdays(num_people):
    birthdays = [random.randint(1,365) for _ in range(num_people)]
    return len(birthdays) != len(set(birthdays))

def simulate_birthday_problem(num_simulations, num_people):
    duplicates = 0
    for _ in range(num_simulations):
        if has_duplicate_birthdays(num_people):
            duplicates += 1
    return duplicates/num_simulations

num_people = 23
num_simulations = 10000
probability = simulate_birthday_problem(num_simulations,num_people)
print(f"{num_people}23 人中至少两人生日相同的概率:
      {probability * 100:.1f}%")
# 预期输出 23 人中至少两人生日相同的概率:约 50.7%
```

数学文化

样本空间与随机事件是概率论中的基本概念,它们不仅具有重要的数学意义,还蕴含着丰富的数学文化.17 世纪,数学家帕斯卡(Pascal)和费马(Fermat)在解决赌徒分赌金问题时,首次系统地研究了随机事件的可能性,奠定了概率论的基础.样本空间和随机事件的研究涉及确定性与随机性的哲学思考.样本空间和随机事件的概念广泛应用于日常生活,如天气预报、彩票、保险等领域.样本空间是数学家对随机现象进行抽象化的结果.通过将现实问题转化为数学模型,数学家能够更清晰地分析问题.样本空间和随机事件的研究揭示了数学中的对称性、简洁性和统一性.

基础题

- 试写出下面随机试验的样本空间.
 - 将一枚硬币抛掷两次,观察出现正反面的情况.
 - 设一长度为 L 的棉纱上随机地分布有 2 个疵点将棉纱分成 3 段,观察各段的长度.



真题在线

- 在某高速公路上随机抽查 8 辆汽车,调查其中交通违法车辆数.
- 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $C = \{2, 1, 3\}$, 试讨论 A, B, C 的关系.
- 设 A, B, C 表示 3 个事件,试用它们表示下列事件.
 - A 发生, B 与 C 不发生.
 - A 与 B 发生, C 不发生.
 - A, B 与 C 都发生.
 - A, B 与 C 至少有 1 个发生.
 - A, B 与 C 全不发生.
 - A, B 与 C 至少有 2 个发生.
- 用事件的关系证明下列等式.
 - $A \cup B = A \cup \overline{AB}$.
 - $(A \cup B) - B = A \overline{B}$.

进阶题

- 判断题
 - 若 $AB = \emptyset$ 且 $C \subset A$, 则 $BC = \emptyset$. ()
 - A 发生, B 与 C 都不发生可写为 $A \overline{BC}$. ()
- 某射击运动员对一目标连续进行 3 次射击,设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次击中目标}\}$, $\overline{A_i} = \{\text{第 } i \text{ 次未击中目标}\}$, $i = 1, 2, 3$, 试用 $A_i, \overline{A_i}$ 表示下列事件.
 - $B_j = \{3 \text{ 次射击中恰好有 } j \text{ 次击中目标}\}$, $j = 0, 1, 2, 3$.
 - $C_k = \{3 \text{ 次射击中至少有 } k \text{ 次击中目标}\}$, $k = 0, 1, 2, 3$.
- 袋中有 8 个球,依次编号为 $1, 2, \dots, 8$, 从中任取一球,观察其号码.
 - 试用集合表示事件 $A = \{\text{摸出球的号码为偶数}\}$.
 - 连续摸球两次,设 $B = \{\text{两球号码都是偶数}\}$, 则 B 等于多少?

学习反思

第二节

随机事件的概率及其性质



引例 2

概率描述

在日常生活中,我们经常会听到类似的描述:我们有 90% 的把握做成这件事;产品的好评率达到 99% 等.这些描述的共性是什么? 这些描述对人们的生活有什么意义? 如何描述这些现象?

问题分析: 研究随机现象,不仅要关心试验中会出现哪些事件,更重要的是要知道事件出现的可能性大小,也就是事件的概率.那么,了解事件发生的可能性即概率的大小,对人们的生活有什么意义呢? 比如,了解发生意外人身事故的可能性大小有助于确定保险金额;要在某条河流上建造一座防洪大坝,为了确定堤坝高度,就要了解该条河流在建造大坝的地段每年最大洪水达到某高度的可能性大小等.

什么是随机事件的概率? 如何求得某事件的概率? 接下来具体讨论这些问题.

一、概率的概念

为了更好地了解概率的概念,先看一下例 1.5.

例 1.5 抽样检查一些药厂产品,其结果见表 1.3.

表 1.3 药厂产品抽样检查结果

抽出产品件数 (n)	5	10	70	150	500	800	1 200	1 800	2 400
次品数 (m)	0	4	8	19	55	85	115	176	244
次品率 ($\frac{m}{n}$)	0	0.400 0	0.114 0	0.127 0	0.110 0	0.106 3	0.095 8	0.097 8	0.101 7

从表中数字可以看出:抽出产品件数 n 较小时,次品率在 0 与 1 之间随机波动,且幅度较大,但随着 n 增大,次品率呈现出稳定性.即当 n 逐渐增大时,次品率总是在 0.1 左右摆动并逐渐稳定于 0.1.

定义 1.1 设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 m 次, 比值 $\frac{m}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率, 当 n 很大时, $\frac{m}{n}$ 就在某一数值 p 的附近摆动, 而随着试验次数的增加, 摆动的幅度越来越小, 称 p 为事件 A 发生的概率, 记为 $P(A)$, 即

$$P(A) = p \quad (1.1)$$

二、概率的性质

(一) 基本性质

(1) 非负性: 对于任意的随机事件, 都有 $0 \leq P(A) \leq 1$. (1.2)

(2) 规范性: $P(\Omega) = 1$. (1.3)

(3) 可列可加性: 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (1.4)$$

满足以上 3 条基本性质的实数 $P(A)$ 就可以称为事件 A 发生的概率, 这其实就是概率的公理化定义. 可以由概率的公理化定义推出下面的性质.

(二) 其他性质

(1) 不可能事件的概率为 0, 即 $P(\emptyset) = 0$.

证明: 因为 $\Omega = \Omega + \emptyset + \emptyset + \dots$, 由可列可加性得

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$$

而

$$P(\Omega) = 1, \text{ 所以 } P(\emptyset) = 0$$

(2) 有限可加性: 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (1.5)$$

证明: 设 $B_1 = A_1, B_2 = A_2, \dots, B_n = A_n, B_{n+1} = \emptyset, B_{n+2} = \emptyset, \dots$, 则 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 也两两互不相容, 且 $\sum_{i=1}^n B_i = \sum_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i$. 由可列可加性得

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= P\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i\right) \\ &= P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) + P(B_{n+1}) + \dots \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) \end{aligned}$$

(3) 逆事件概率的计算: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

证明: 因为 $A + \overline{A} = \Omega, A \cap \overline{A} = \emptyset$, 由有限可加性得

$$P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

而 $P(\Omega) = 1$, 所以 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

(4) 差事件概率的计算和概率的单调性.

若 $B \subset A$, 则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$, 且 $P(B) \leq P(A)$.

证明: 因为 $B \subset A$, 所以 $A = (A - B) \cup B$, 又 $(A - B) \cap B = \emptyset$, 所以 $A - B$ 与 B 互不相容, 由可列可加性得 $P(A) = P((A - B) \cup B) = P(A - B) + P(B)$, 即有

$$P(A - B) = P(A) - P(B)$$

由概率的非负性得 $P(A - B) \geq 0$, 即有

$$P(B) \leq P(A)$$

进一步的, 对于任意的 A, B , 有 $P(A - B) = P(A - AB) = P(A) - P(AB)$.

(5) 加法公式: 设 A, B, C 为任意 3 个事件, 则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

证明: 因为 $A \cup B = A \cup (B - AB)$, 又 $(B - AB) \cap A = \emptyset$, 所以 $B - AB$ 与 A 互不相容, 由可列可加性得

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P((B - AB) \cup A) = P(B - AB) + P(A) \\ &= P(B) - P(AB) + P(A) = P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

同样地,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

对于任意 n 个事件, $A_1, A_2, \dots, A_n$, 都有下式成立,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \dots + \\ &\quad (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \end{aligned}$$

在处理实际问题时, 通常是用试验次数足够大时的频率来度量概率的. 但是, 在有的问题中, 不可能也不需要为每一事件都做大量的试验, 然后求得频率, 用以表征事件发生的可能性大小. 为了进一步弄清概率的实质, 先来了解一下古典概型.

三、古典概型

1. 古典概型的定义

定义 1.2 设随机试验 E 满足如下两个条件:

- (1) 样本空间 Ω 中样本点的总数有限.
- (2) 每个样本点出现的可能性大小相同.

则称这样的试验为古典概型.

2. 古典概型的计算公式

设随机试验 E 是只含有有限的 n 个基本事件 $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}$ 的古典概型, 显然, 样本空间样本点总数为 n .

(1) 单个基本事件的概率.

$$P\{\omega_i\} = \frac{1}{n} \quad (1.6)$$

由于每个基本事件是互不相容的, 故有

$$1 = P(\Omega) = P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \dots \cup \{\omega_n\}) = P\{\omega_1\} + P\{\omega_2\} + \dots + P\{\omega_n\} = nP\{\omega_i\}$$

所以

$$P\{\omega_i\} = \frac{1}{n}$$

(2) 复合事件的概率.

若事件 A 中含有 m 个基本事件, $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$, 则

$$P(A) = P\{\omega_1\} + P\{\omega_2\} + \dots + P\{\omega_m\} = \frac{m}{n} = \frac{A \text{ 中样本点的个数}}{\Omega \text{ 中样本点的总数}} \quad (1.7)$$

例 1.6 选择 $0, 1, 2, \dots, 9$ 共 10 个数字中的任意两个(可重复使用)组成一个两位数的字码, 求字码之和为 4 的概率.

解: 样本空间总数为 10^2 , 字码之和为 4 的有 04, 13, 22, 31, 40 共 5 个字码, 设 $A = \{\text{字码之和为 4}\}$, 则由古典概型的计算公式可得

$$P(A) = \frac{5}{10^2} = \frac{1}{20}$$

例 1.6 中对待求事件的样本点数 m 采用的方法为枚举法, 只适用于简单事件, 在研究复杂事件时, 该方法就显得比较麻烦.

例 1.7 【技术开发联合问题】 在日常工作中, 一个人从事一项工作时, 可能会感觉到势单力薄, 甚至力不从心, 从下面的问题可以看到合作的重要性. 如果甲单独开发某项新技术, 成功的概率为 0.8, 乙单独开发这项技术, 成功的概率为 0.85, 两人同时开发时都成功的概率为 0.68. 公司将开发任务交给甲、乙两人, 则该新技术开发成功的概率是多少?

解: 设 $A = \{\text{甲开发成功}\}$; $B = \{\text{乙开发成功}\}$, 根据题意有

$$P(A) = 0.8, P(B) = 0.85, P(AB) = 0.68$$

新技术开发成功意味着只要甲成功开发或乙成功开发就可以了, 即 $A + B$ 就意味着开发成功, 所以

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.8 + 0.85 - 0.68 = 0.97$$

即新技术开发工作在两个人合作的前提下, 成功的概率大大提高, 这也从定量分析的角度印证了团队合作的重要性.

例 1.8 设 10 000 张奖券中只有一、二、三等奖, 其中有 1 个一等奖, 5 个二等奖, 10 个三等奖, 买一张奖券, 试问中奖的概率是多少?

方法 1 设事件 $A = \{\text{中奖}\}$, $A_1 = \{\text{中一等奖}\}$, $A_2 = \{\text{中二等奖}\}$, $A_3 = \{\text{中三等奖}\}$.

$$\text{则 } P(A_1) = \frac{1}{10\,000}, P(A_2) = \frac{5}{10\,000} = \frac{1}{2\,000}, P(A_3) = \frac{10}{10\,000} = \frac{1}{1\,000}.$$

又根据题意知, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, 且 A_1, A_2, A_3 互不相容, 所以

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{16}{10\,000} = 0.16\%$$

方法 2 设事件 $A = \{\text{中奖}\}$, 则其逆事件 $\bar{A} = \{\text{不中奖}\}$, 于是

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{10\,000 - 16}{10\,000} = \frac{16}{10\,000} = 0.16\%$$

例 1.9 一个电路上装有甲、乙两根保险丝, 当电流强度超过一定数值时, 甲被烧断的概率为 0.85, 乙被烧断的概率为 0.74, 两根保险丝同时被烧断的概率为 0.63. 至少有 1 根保险丝被烧断的概率为多少?

解: 设事件 $A = \{\text{甲保险丝被烧断}\}$, $B = \{\text{乙保险丝被烧断}\}$.

由已知, $P(A) = 0.85, P(B) = 0.74, P(AB) = 0.63$. 则甲、乙两根保险丝至少有 1 根被烧断的概率为

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= 0.85 + 0.74 - 0.63 = 0.96 \end{aligned}$$

例 1.10 抛掷两个骰子,求点数为 7 的概率.

解:样本空间总数为 6^2 ,点数之和为 7 的有 1 和 6,6 和 1,2 和 5,5 和 2,3 和 4,4 和 3 共 6 种情况,设事件 $A = \{\text{点数之和为 7}\}$,则由古典概型的计算公式可得

$$P(A) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$$

• 编探概率 •

抛掷骰子概率问题

目标:验证 Python 计算结果是否等于手动计算结果.

Python

```
import itertools

# 生成样本空间:两个骰子的所有可能组合
dice = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
sample_space = list(itertools.product
(dice, repeat = 2))

# 计算事件 A(和为 7)的有利事件数
event_A = [sum(pair) for pair in sample
_space].count(7)

# 计算概率
probability = event_A / len(sample_space)
print(f"理论概率: {probability:.4f}")#
输出: 0.1667
```

四、几何概型

1.几何概型的定义

定义 1.3 设随机试验 E 满足如下两个条件:

- (1) 样本空间 Ω 中样本点的总数无限.
- (2) 每个样本点出现的可能性相同.

则这样的试验为几何概型.

2.几何概型的计算公式

设随机试验 E 的结果可用某一区域 Ω 内的点的随机位置来确定,且点落在区域 Ω 中的任意位置是等可能的,事件 A 表示点落在 Ω 的某一子区域内,该子区域仍记为 A ,用 $\mu(A)$

表示子区域 A 的度量,则

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \quad (1.8)$$

说明:若子区域为一维空间(A 为区间), $\mu(A)$ 表示区间 A 的长度;若子区域为二维空间, $\mu(A)$ 表示 A 的面积;以此类推.

例 1.11 两人相约 8 时到 9 时在某地会面,先到者等候另一人 15 min,就可离去.试求这两人能会面的概率.

解:以 min 为单位,8 时到 9 时相隔 60 min;设 x, y 分别表示两人到达的时刻,有 $0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60$,则会面的充要条件为 $0 \leq |x - y| \leq 15$,此为几何概型问题. Ω 的全体为边长为 60 的正方形里的任意点,能会面的点 $\mu(A)$ 在图 1.7 阴影部分所示区域中,则所求概率为

$$P = \frac{60^2 - 45^2}{60^2} = \frac{1\ 575}{3\ 600} = 0.437\ 5$$

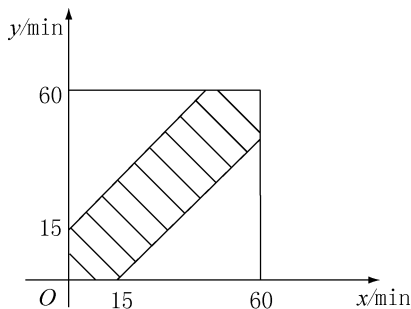


图 1.7 例 1.11 图

需要注意的是,做几何概型相关的题时,最好作图分析.

数学
文化

几何概型作为概率论的重要分支,不仅是一种数学工具,更承载着丰富的文化内涵.它通过几何与概率的融合,展现了人类对空间、随机性和无限性的探索,其文化价值体现在历史、哲学、艺术及跨学科应用等多个层面.几何概型不仅是数学公式的集合,更是人类认知世界的文化镜鉴.

习题 1.2

基础题

- 做随机试验 E :将一枚硬币抛掷 3 次,观察出现正反面的情况.
 - 设事件 A 为“恰好有 1 次出现正面”,求 $P(A)$.
 - 设事件 B 为“至少有 1 次出现正面”,求 $P(B)$.
- 《毛泽东选集》四卷,可按任意次序放到书架上,问按顺序放的概率是多少?
- n 个人按顺序编号后随机地围成一个圆圈坐下,试问某一对相邻号码的两个人正好座位也相邻的概率.



真题在线

 进阶题

1. 把 20 个球队分成相等的两组进行比赛, 求最强的两队分在不同组的概率.
2. 小概率事件: 接待站在某一周曾接待过 10 次来访, 已知这 10 次接待都是在周二、周四进行的. 问: 是否可以推断接待时间是有规定的?
3. 在编号为 $1, 2, \dots, n$ 的 n 张赠券中, 采用无放回方式抽签, 试求在第 k 次抽到 1 号赠券的概率.

 学习反思

第三节 •

条件概率与全概率公式



引例 3

抽奖问题分析

公司在迎新年聚餐时, 为了活跃气氛往往要开展一些抽奖活动, 如果设置一等奖 1 名, 二等奖 5 名, 三等奖若干名, 那么我们在抽奖时应不应该抢着去抽奖, 以防一等奖被人抽走了? 抽奖的先后顺序对抽中一等奖的概率有影响吗?

问题分析: 如果我们是第二个抽奖的人, 抽中的概率相比于第一个人会有什么变化吗? 大家都知道, 第一个人抽中一等奖的概率是总奖券张数分之一; 第二个人去抽就有两种情况发生, 若第一个人抽走了一等奖, 则他抽中一等奖的概率为 0, 若第一个人没有抽中一等奖, 那他抽中一等奖的概率比前一个人大, 为总奖券数减 1 分之一, 综合以上两种情况, 第二个人抽中一等奖的概率该如何计算? 计算出来之后, 第三个, 第四个, ……最后一个人抽中一等奖的概率都能计算出来, 从而可以比较不同抽奖顺序的中奖率变化情况.

很多情况下, 我们需要考虑在事件 B 已发生的条件下事件 A 发生的概率, 那么这种事

件的概率应该如何求解? 接下来我们具体讨论这些问题.

一、条件概率与乘法公式

为了讨论条件概率, 首先研究下面几个例子.

例 1.12 已知 100 件产品中有 5 件不合格品, 而 5 件不合格品中又有 3 件次品、2 件废品, 现从 100 件产品中任意抽取 1 件. 设 $A = \{\text{废品}\}$, $B = \{\text{不合格品}\}$, 试计算在已知抽取的产品为不合格品的情况下, 该产品是废品的概率.

解: 由古典概率计算得

$$P(A) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

如果考虑 B 已经发生的条件下, A 发生的概率, 也就是相当于从 5 件不合格品中抽得一件废品的概率, 即为 $\frac{2}{5}$.

例 1.13 设某厂生产的碗一箱共有 10 只, 已知在运货途中有 2 只已经损坏, 变成了废品, 其他 8 只正常, 现从箱中取 2 次, 每次任取 1 只, 做不放回抽样处理, 问第 1 次取到废品后第 2 次再取到废品的概率.

解: 设 $A = \{\text{第 1 次取到废品}\}$, $B = \{\text{第 2 次取到废品}\}$, $C = \{\text{第 1 次取到废品后第 2 次再取到废品}\}$.

显然有

$$P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

而 $B = AB \cup \bar{A}B$, 且 $AB \cap \bar{A}B = \emptyset$, 于是有

$$P(B) = P(AB) \cup P(\bar{A}B) = \frac{2 \times 1}{10 \times 9} + \frac{8 \times 2}{10 \times 9} = \frac{1}{5}$$

从这一点不难理解, 抽签中奖的概率与先后顺序无关.

C 事件是在 A 事件发生后来看 B 事件发生的问题, 在 A 事件发生后, 箱子里还剩下 9 只碗, 新的样本空间缩小了, 其中只有 1 只废品. 有 $P(C) = \frac{1}{9}$, $P(C)$ 称为 A 事件发生的条件下 B 事件发生的条件概率, 记为 $P(B | A)$.

1. 条件概率的定义

定义 1.4 设 A, B 为随机试验 E 的任意两事件, 且 $P(B) > 0$, 称下式为事件 B 发生的前提下, 事件 A 发生的条件概率, 简称 A 关于 B 的条件概率.

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (1.9)$$

同理, 当 $P(A) > 0$ 时, 可定义事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率为

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (1.10)$$

2. 计算条件概率 $P(A | B)$ 的方法

(1) 在缩小的样本空间 Ω_B 上计算 A 发生的概率.

(2) 在原样本空间 Ω 上, 利用定义式计算.

我们再来计算一下例 1.13.

第一种方法:在缩小的样本空间中计算,因第一次取得了废品,箱子中只剩下 9 只碗,其中 1 只为废品,所以

$$P(B|A) = \frac{1}{9}$$

第二种方法:在原样本空间中计算,由于

$$P(A) = \frac{1}{5}, P(AB) = \frac{2 \times 1}{10 \times 9} = \frac{1}{45}$$

因此

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/45}{1/5} = \frac{1}{9}$$

例 1.14 鉴于我国人口老龄化的趋势日益严峻,精确把握并深入分析各年龄段的死亡率数据变得愈发重要,这对于制定有效的社会保障政策、优化医疗资源配置及促进人口结构健康发展具有至关重要的意义.人活到不同年龄段的死亡率(%)见表 1.4.

表 1.4 人活到不同年龄段的死亡率

年龄段	0~10	11~20	21~30	31~40	41~50	51~60	61~70	71~80	>80
死亡率	3.23	0.65	1.21	1.84	4.31	9.69	18.21	27.28	33.58

试求一个 70 岁的人在 80 岁前死亡的概率.

解: 设 $B = \{70 \text{ 岁以后死亡}\}$, $A = \{80 \text{ 岁前死亡}\}$, 则

$$P(B) = 0.2728 + 0.3358 = 0.6086$$

而在 70 岁至 80 岁之间死亡的概率为 $P(AB) = 0.2728$, 则

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.2728}{0.6086} = 0.4482$$

3. 概率的乘法公式

由条件概率的定义可得到概率的乘法公式:

设 $P(A) > 0$, 则有

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) \quad (1.11)$$

设 $P(B) > 0$, 则有

$$P(AB) = P(B|A) \cdot P(A) \quad (1.12)$$

对于 3 个事件的情形, 有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \quad (1.13)$$

例 1.15 设某光学仪器厂制造的透镜, 第一次落下时打碎的概率为 $1/2$, 若第一次未打碎, 第二次落下时打碎的概率为 $3/5$, 若前两次未打碎, 第三次落下时打碎的概率为 $9/10$, 试求透镜落下 3 次都未打碎的概率.

解: 设 $A_i = \{\text{透镜第 } i \text{ 次落下时被打碎}\} (i=1, 2, 3)$, $B = \{\text{透镜落下 3 次未被打碎}\}$, 则

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2} | \overline{A_1}) P(\overline{A_3} | \overline{A_1} \overline{A_2}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{3}{5}\right) \left(1 - \frac{9}{10}\right) = \frac{1}{50} \end{aligned}$$

概率的乘法公式对抽签问题可以进行很好的解释.

二、全概率公式与贝叶斯公式

由概率的可列可加性和条件概率的定义可以推导出全概率公式.

1. 样本空间的划分

(1) **定义 1.5** 设 Ω 为试验 E 的样本空间, 如果存在 $B_i \subset \Omega (i=1, 2, \dots, n)$, 且满足

$$\textcircled{1} B_i B_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\textcircled{2} B_1 + B_2 + \dots + B_n = \Omega,$$

则称 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 Ω 的一个划分.

例 1.16 设试验 E 为“掷一枚骰子, 观察出现的点数”. 它的样本空间为 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. E 的一组事件 $B_1 = \{1, 2\}, B_2 = \{3, 4, 5\}, B_3 = \{6\}$ 是 Ω 的一个划分; 而事件组 $C_1 = \{1, 2, 3\}, C_2 = \{3, 4, 5\}, C_3 = \{6\}$ 就不是 Ω 的一个划分.

证明: 若 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分, 则对每次试验而言, 事件组 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 中必有且仅有一个事件发生. 可见, Ω 的划分是将 Ω 分割成若干个互斥事件, Ω 的划分不是唯一的.

(2) 事件关于给定样本空间的一个划分的表示.

对于给定的样本空间 Ω , 若存在划分 $B_1, B_2, \dots, B_n$, 对 Ω 中的任一事件 A 可表示为

$$A = A\Omega = A\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \bigcup_{i=1}^n AB_i$$

2. 全概率公式

设试验 E 的样本空间为 Ω , A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 则有

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i) \quad (1.14)$$

证明: 由已知条件可知

$$A = A\Omega = A\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \bigcup_{i=1}^n AB_i$$

而 $P(B_i) > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 有 $(AB_i)(AB_j) = \emptyset (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n)$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AB_1) + P(AB_2) + \dots + P(AB_n) \\ &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i) \end{aligned}$$

例 1.17 设有一批同类型的药品是由 3 家企业生产的. 已知其中有 $\frac{1}{2}$ 的药品是第一家企业生产的, 有 $\frac{3}{8}$ 的药品是第二家企业生产的, 有 $\frac{1}{8}$ 的药品是第三家企业生产的, 又已知第一、二、三家企业生产的药品各有不合格品 2%, 3%, 2%. 现从此批药品中任取一包, 问取到的药品是不合格品的概率是多少.

解: 设 $A = \{\text{取到的药品是不合格品}\}$, $B_i = \{\text{取到的药品是第 } i \text{ 家企业生产的}\} (i=1, 2, 3)$. 显然, 全部药品构成样本空间 Ω , B_1, B_2, B_3 为 Ω 的一个划分. 根据题意可知:

$$P(B_1) = \frac{1}{2}, \quad P(B_2) = \frac{3}{8}, \quad P(B_3) = \frac{1}{8}$$

$$P(A|B_1) = \frac{2}{100}, \quad P(A|B_2) = \frac{3}{100}, \quad P(A|B_3) = \frac{2}{100}$$

由全概率公式得

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) \\ &= \frac{2}{100} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{100} \times \frac{3}{8} + \frac{2}{100} \times \frac{1}{8} = \frac{19}{800} \end{aligned}$$

若进一步问“已知取得的药品是不合格品,问该不合格品是由第二家企业生产的概率”.即求取得的药品为不合格品的前提下,该不合格品是由第二家企业生产的条件概率.

3. 贝叶斯公式

(1) 贝叶斯公式.

设试验 E 的样本空间为 Ω . A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分, 且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} \quad (1.15)$$

贝叶斯公式是在观察到事件 A 已发生的条件下,寻找导致 A 发生的每个因素的概率. 全概率公式看成“由原因推结果”,贝叶斯公式可看成“由结果推原因”,可以帮助人们确定某结果发生的最可能的原因.

(2) 先验概率与后验概率.

在公式(1.15)中, $P(B_i)$ 是在没有进一步信息的情况下,人们根据历史资料和相关数据对诸事件发生可能性大小的估计,称为先验概率.

当随机试验发生以后,有了新的信息, A 已经发生,人们对诸事件发生可能性大小 $P(B_i|A)$ 有了新的估计,称为后验概率.

例 1.18 甲、乙两人毕业后去同一家公司参加应聘面试,考官要求每个进入面试室的应聘者从抽签箱中任抽一个面试题回答问题(抽后不放回,防止漏题).已知面试箱中共有 10 个考签,其中 4 个难签,若甲先面试而后乙面试,试分析甲、乙两人谁抽到难签的概率高?

解: 设 A 表示“甲抽到难签”, B 表示“乙抽到难签”,则易知

$$P(A) = \frac{4}{10}$$

由于乙是第二个抽签,他抽到难签还是比较容易的签受甲抽到的签的影响,因此

$$\begin{aligned} P(B) &= P(AB + \bar{A}B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\ &= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{10} \end{aligned}$$

所以,从理论上说,谁先面试谁后面试,抽到难签的概率是相等的.

• 编探概率 •

医疗诊断问题(贝叶斯定理)

问题:已知某疾病在人群中的发病率为 1%,检测的准确率为 99%(即患病者检测为阳性的概率为 99%,健康人误检为阳性的概率为 1%).若某人检测结果为阳性,则其实际患病的条件概率是多少?

Python

```
def bayesian_diagnosis():
    # 定义基础概率(根据题目输入)
    prevalence = 0.01      # 发病率为 1%
    sensitivity = 0.99      # 患病者检测为阳性的概率为 99%
    false_positive = 0.01   # 健康人误检为阳性的概率为 1%

    # 计算全概率 P(检测阳性) = P(阳性|患病) * P(患病) + P(阳性|健康) * P(健康)
    p_positive = (sensitivity * prevalence) + (false_positive * (1 - prevalence))

    # 贝叶斯定理计算 P(患病|阳性)
    p_disease_given_positive = (sensitivity * prevalence) / p_positive

    # 输出结果(保留 2 位小数)
    print(f"检测结果为阳性时,实际患病的概率为: {p_disease_given_positive:.2%}")

# 执行函数
bayesian_diagnosis()

# 输出结果
检测结果为阳性时,实际患病的概率为: 50.00%
```



数学
文化

条件概率,作为概率论的核心工具,不仅是一把解锁复杂世界的文化钥匙,更是一座连接科学与人文的桥梁.它以“给定条件”为框架,将冷峻的数学逻辑与深邃的哲学思辨、历史的沉淀、社会的结构,以及艺术的灵动交织在一起,绘制出一幅科学与人文交融的瑰丽画卷.在人工智能的浪潮中,条件概率掀起了一场算力革命:贝叶斯网络如同一张精密的蜘蛛网,用有向图勾勒出变量间的条件依赖关系,例如在医疗诊断系统中,通过症状(如发热、咳嗽)与疾病(如流感、肺炎)的条件概率,构建出一座推理的迷宫,指引医生找到真相的出口;语言模型则以条件概率为画笔,ChatGPT 在前文语境的画布上,描绘出下一个词的概率分布,然而这幅画作也可能沾染训练数据中的偏见(如性别歧视的影响),成为文化风险的隐喻.条件概率揭示了一个深刻的真理:真相并非绝对,而是依附于观察者的视角、历史的偶然与文化的滤镜.这种数学工具的文化生命力在于其双重性:它既承认现实的限制(如“给定已有证据”),又开放探索的可能(如“求解未知事件”).恰如文明进程本身——在确定性与不确定性的交织中,我们以条件为舟,航向未知的真理之海.

习题 1.3

基础题

1. 2024 年中国足球协会超级联赛在北京工人体育场举办,作为职业足球联赛,其比赛肯定异常精彩,可 A 高校某班 30 位同学仅购得一张票,大家都想去看,只好采取抓阄的办法抽签决定,每个人都争先恐后地抽取.试问,每人抽得此票的机会是否均等?



真题在线

2. 现有 10 个阄,其中两阄为“有”,其余均为“无”.试用全概率公式判断第二个抓阄者是否比第一个抓阄者抓到“有”的概率要小.

3. 某人忘记了电话号码的最后一位数字,他就随机地拨号.求他拨号不超过 3 次就接通所需电话的概率.若已知最后一位号码是偶数,则此概率又是多少?

进阶题

1. 某一地区患有癌症的人占 0.005,患者对一种试验反应是阳性的概率为 0.95,正常人对这种试验反应是阳性的概率为 0.04,现抽查了一个人,试验反应是阳性,问此人是癌症患者的概率有多大? 并分析一下所求结果的现实意义.

2. 有一台机床,当其正常运行时,生产的产品的合格率为 90%,当其非正常运行时,生产的产品的合格率为 30%,由历史数据分析显示:每天上班启动机床时,机床正常运行的概率为 75%,现某检验人员为了检验机床是否正常运行,启动机床生产出了 1 件产品,经检验,该产品为合格品.问此时机床处于正常运行状态的概率是多少? 是否可以认为此时机床处于正常运行的工作状态?

3.一位同学接连参加同一课程的两次考试.第1次及格的概率为 p ,若第1次及格则第2次及格的概率也为 p ,若第1次不及格则第2次及格的概率为 $p/2$.

(1)若至少有1次及格,他就能取得某种资格证书,问他取得这种资格证书的概率是多少?

(2)若已知他第2次及格,求他第1次及格的概率.

学习反思

第四节

事件的独立性



引例 4

抽球问题

一个不透明的袋子里装有6红4白10个外形完全相同的乒乓球,从中每次摸1个球,观察颜色后放回袋子里,试分析第一次摸到红球的前提下,第二次摸到白球的概率.

问题分析:由于第一次摸到红球后放回了袋子中,所以第二次去摸球时,第一次摸到红球对其不产生任何影响,此时袋子里还是6红4白10个乒乓球,所以第二次摸到红球的概率还是0.6.类似于这样前一事件发生与否对后一事件不产生影响时,称后一事件对前一事件是独立的.这种现象在现实工作和生活中是经常碰到的.

设 A, B 为随机试验 E 的两个事件,一般来说, A 事件的发生往往影响 B 事件的发生,即 $P(B|A) \neq P(B)$. 那么,什么样的情况下 A 事件的发生不会影响 B 事件的发生呢? 这个问题就是下面要研究的主要内容.

一、事件的独立性

1. 事件独立性的定义

定义 1.6 若事件 A 和事件 B 满足:

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (1.16)$$

则称事件 A 独立于事件 B .

说明: (1) A 独立于 B , 则必有 B 独立于 A , 从而 A, B 之间相互独立;

(2) 若 $P(B) = 0$, 则必有 A 独立于 B ;

(3) 在实际应用中, 往往根据问题的实际意义去判断两事件是否独立, 即一事件发生与否并不影响另一事件发生的概率.

2. 独立的判定定理

(1) **定理 1.1** 设 A, B 为随机试验 E 的两个事件, 若 $P(B) > 0$, 则 A 与 B 独立的充要条件是 $P(A|B) = P(A)$; 若 $P(A) > 0$, 则 A 与 B 独立的充要条件是 $P(B|A) = P(B)$.

(2) **定理 1.2** 若事件 A 与 B 相互独立, 则下列各对事件也相互独立.

A 与 $\bar{B}$, $\bar{A}$ 与 B , $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$.

3. 独立与互斥的关系

若 A, B 互斥, 且 $P(A) > 0, P(B) > 0$, 则 A 与 B 不互相独立; 反之, 若 A 与 B 独立, 且 $P(A) > 0, P(B) > 0$, 则 A 与 B 不互斥, 即独立与互斥不能同时成立.

4. 多个事件的独立

定义 1.7 设 A, B, C 是 3 个事件, 如果满足等式:

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B), & P(AC) &= P(A)P(C) \\ P(BC) &= P(B)P(C), & P(ABC) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

则称事件 A, B, C 相互独立.

注意: 若只满足前 3 个等式则只能称事件 A, B, C 两两独立.

在讨论 n 个事件是否相互独立时, 总共需要验证 $(2^n - 1 - n)$ 个等式是否成立.

例 1.19 某公司生产的一批产品中, 从统计分析, 次品率为 10%, 为了检验该批产品的次品率, 进行重复抽样检查, 共取 5 件样品, 试分析:

(1) 这 5 件样品中恰好有 3 件次品的概率;

(2) 这 5 件样品中至多有 3 件次品的概率.

解: 设 $A_i = \{\text{这 5 件样品中恰有 } i \text{ 件次品}\} (i=0, 1, 2, 3), n=5, p=0.1$. 则有

$$(1) P(A_3) = P_5(3) = C_5^3 \times 0.1^3 \times (1-0.1)^2 \approx 0.0081.$$

$$\begin{aligned} (2) P(A_0 + A_1 + A_2 + A_3) &= P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) + P_5(3) \\ &= C_5^0 \times (1-0.1)^5 + C_5^1 \times 0.1^1 \times (1-0.1)^4 + C_5^2 \times 0.1^2 \times (1-0.1)^3 + C_5^3 \times 0.1^3 \times (1-0.1)^2 \\ &= 0.99954. \end{aligned}$$

• 编探概率 •

Python 模拟独立事件(骰子与硬币)

目标:验证两个独立事件(掷骰子和抛硬币)的联合概率是否等于各自概率的乘积.

Python

```
import numpy as np

# 模拟参数
n_trials = 100000
dice_results = np.random.randint(1,7,n_trials) # 骰子(1~6)
coin_results = np.random.randint(0,2,n_trials) # 硬币(0 = 反面,1 = 正面)

# 计算独立事件的联合概率
prob_dice_4 = np.mean(dice_results == 4) # P(骰子 = 4)
prob_coin_head = np.mean(coin_results == 1) # P(硬币 = 正面)
joint_prob = np.mean((dice_results == 4)&(coin_results == 1)) # P(骰子 = 4 且 硬币 = 正面)

# 验证独立性:  $P(A \cap B) \approx P(A) * P(B)$ 
print(f"P(骰子 = 4):{prob_dice_4:.4f}")
print(f"P(硬币 = 正面):{prob_coin_head:.4f}")
print(f"联合概率:{joint_prob:.4f}")
print(f"乘积:{prob_dice_4 * prob_coin_head:.4f}")

输出:
P(骰子 = 4):0.1665
P(硬币 = 正面):0.5002
联合概率:0.0833
乘积:0.0833
```

二、伯努利试验

1. n 重独立试验

将某试验 E 重复进行 n 次,且各次试验的结果在概率上互不影响,则称此 n 次试验为 n 重独立试验.

2. n 重伯努利 (Bernoulli) 试验

设在同一条件下,每次试验 E 只有两种可能结果: A 与 $\bar{A}$, 它们的概率 $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ ($0 < p < 1$),将试验 E 独立地重复进行 n 次,则称为 n 重伯努利试验,简称伯努利试验.

例 1.20 设生男孩的概率为 $P(A)=p$, 生女孩的概率为 $P(\bar{A})=1-p=q$, 令 X 表示随机抽查出生的 3 个婴儿中男孩的数量, 试分析生男孩的概率.

解: 由题意可知, 此为 3 重伯努利试验, $n=3$, X 的取值为 k ($k=0,1,2,3$), 令 A_k ($k=1,2,3$) 表示事件 A 在第 k 次试验中发生; $\bar{A}_k$ ($k=1,2,3$) 表示事件 A 在第 k 次试验中不发生.

当 $k=0$ 时, 事件 A 发生 0 次, 这时 A 出现的情况是 $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$, 共 C_3^0 种, 由于 $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ 两两互不相容且各次试验相互独立, 因此有

$$P(X=0)=P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=q^3=C_3^0 p^0 q^3$$

当 $k=1$ 时, 事件 A 发生 1 次, 这时 A 出现的情况是 $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3, \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3, \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ 共 C_3^1 种, 同理有

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) \\ &= P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) \\ &= pq^2 + pq^2 + pq^2 = 3pq^2 = C_3^1 p^1 q^2 \end{aligned}$$

同理有

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(A_1 A_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3) \\ &= P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3) \\ &= p^2 q + p^2 q + p^2 q = 3p^2 q = C_3^2 p^2 q \end{aligned}$$

$$P(X=3)=P(A_1 A_2 A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=p^3=C_3^3 p^3 q^0$$

因此, $P(X=k)=C_3^k p^k q^{3-k}$.

一般地, 在 n 重伯努利试验中, 事件 A 发生 k 次的概率为

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}, k=0,1,2,\dots,n$$



数学文化

事件独立性作为概率论的核心概念, 其数学定义简洁明晰, 但若置于文化语境中, 则折射出人类对随机性、因果性与世界本质的多元思考. 区块链分布式账本技术依赖节点独立验证交易, 将独立性公理编码为“代码即法律”的数字信任体系, 重塑社会组织形式. 量子密钥分发利用量子态的不可克隆性(独立性保障), 在物理层面实现绝对安全, 推动独立性从数学抽象到技术实践的跨越.

习题 1.4

基础题

1. 若 A, B 互斥, 且 $P(A) > 0, P(B) > 0$, 试证明 A 与 B 不互相独立.
2. 讨论下面随机试验中的 A, B 事件是否互相独立.
 - (1) 抛甲、乙两枚硬币(其中一面标有 H), 出现的情况中, 事件 A 为“甲币 H 面向上”, 事件 B 为“乙币 H 面向上”;
 - (2) 在甲、乙两人向同一目标射击中, 事件 A 为“甲命中”, 事件 B 为“乙命中”.
3. 将 3 人的血清混合检验, 如果每人的血清含某种病毒的概率为 0.001, 试求混合血清



真题在线

本章小结

随机试验 E 的全部可能结果称为样本空间 Ω . 样本空间 Ω 的每一个样本点称为基本事件, 由基本事件组合而成的事件就是复合事件, 也就是所谓的事件. 在一次试验中, 只要事件中的任一样本点出现, 事件就会发生. 事件的关系可参考集合论中集合的关系来思考.

为了便于更好地讨论随机现象, 探索其规律, 我们把每次试验都必然发生的事件称为必然事件, 记为 Ω ; 把每次试验都不可能发生的事件称为不可能事件, 记为 $\varnothing$.

事件发生的频率往往呈现出稳定性, 可用概率 $P(A)$ 来度量. 在古典概型和几何概型中, 我们给出了具体的计算公式, 两者的共同点是每个样本点出现的可能性相同; 不同点是古典概型的样本空间 Ω 中样本点的总数有限, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A \text{ 中样本点的个数}}{\Omega \text{ 中样本点的总数}}$, 几何概型的样本空间 Ω 中样本点的总数无限, $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, 且计算时往往需要作图分析.

条件概率的定义公式为 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, 它是指在事件 B 发生的前提下, 事件 A 发生的概率. 计算条件概率 $P(A|B)$ 有两种方法, (1) 在缩小的样本空间 Ω_B 上计算 A 发生的概率; (2) 在原样本空间 Ω 上, 利用定义式来计算.

由条件概率的定义, 可得到概率的乘法公式为

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B), \quad P(A) > 0$$

由众多原因找结果发生的概率可用到全概率公式, 即

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

由结果找原因可用到贝叶斯公式, 即

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}$$

事件的独立性是概率论中较为重要的一个概念. 除了根据定义判断以外, 在实际应用中, 往往根据问题的实际意义去判断两事件是否独立, 即一事件发生与否并不影响另一事件发生的概率.



关键词

随机试验	样本空间	随机事件	基本事件	频率
概率	古典概型	几何概型	条件概率	乘法公式
全概率公式	贝叶斯公式	事件的独立性		



拓展延伸

案例 密码问题

随着人工智能技术的飞速发展,我们正处于一个前所未有的科技新时代.中国在生成式人工智能方面取得了举世瞩目的成就,成为全球科技创新的领跑者.然而,科技的进步也带来了新的挑战,信息安全问题日益成为我们无法忽视的重要议题.在这个万物互联的时代,密钥安全是信息安全的基石.无论是手机支付、社交媒体,还是智能家居,我们的日常生活都离不开密码的保护.然而,你是否想过,密码重复使用可能会成为你数字生活中的“隐形炸弹”,今天,我们就通过一个简化的数学模型,来揭示密码重复使用的潜在风险.你会发现,即使是一个看似安全的 6 位数字密码,也可能在不知不觉中让你陷入危险.希望通过这次探索,你能更深刻地理解信息安全的重要性.

若用户注册一款人工智能软件账号,需要随机生成一组 6 位数字密码(换句话说,一共有 10^6 种互不重复的密码),请问最少有多少用户注册时会导致至少两人密码相同的概率超过 50%? 最少有多少用户注册时会导致至少两人密码相同的概率超过 95%?

分析与求解:为方便起见,我们将 10^6 记为 N ,而用 n 表示考虑的用户数目,注意到第二个用户与第一个用户不同的概率为 $\frac{N-1}{N}$,同样地,第三个用户与第二个用户不同的概率为 $\frac{N-2}{N}$,因此 n 个用户的密码互不相同的概率

$$P_{\text{无重复}} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{N-k}{N} = \frac{N-1}{N} \cdot \dots \cdot \frac{N-n+1}{N}$$

从而,存在两个用户密码相同的概率为 $P_{\text{有重复}} = 1 - P_{\text{无重复}}$,题目要求使得 $P_{\text{有重复}} \geq 50\%$ (95%) 的用户数目 n ,通过下面的 Python 程序,我们可以得到当用户数 $n=1\ 178$ 时,密码重复的概率首次超过 50%,当用户数 $n=2\ 448$ 时,密码重复的概率首次超 95%.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.font_manager as fm
```



微课:案例

```
# 设置中文字体(根据系统实际存在的字体调整)
plt.rcParams['font.family'] = 'SimHei' # Windows 系统黑体
plt.rcParams['axes.unicode_minus'] = False # 解决负号显示问题
def exact_collision_probability(targets):
    N = 10 * * 6 # 6 位密码的可能总数(000000~999999)
    prob_no_collision = 1.0
    collision_probs = [0.0] # 碰撞概率记录
```

```

# 初始化阈值追踪字典
target_info = {target: {'met': False, 'n': None} for target in sorted
(targets, reverse = True)}

for n in range(1, N + 1):
    prob_no_collision *= (N - (n - 1)) / N
    current_prob = 1 - prob_no_collision
    collision_probs.append(current_prob)

# 检查所有未达成的阈值
for target in target_info:
    if not target_info[target]['met'] and current_prob >= target:
        target_info[target]['met'] = True
        target_info[target]['n'] = n
        print(f"精确解: 当用户数 n = {n} 时, 碰撞概率首次超过
{target * 100:.0f} % ({current_prob * 100:.2f} %)")

# 当所有阈值达成时提前终止
if all(info['met'] for info in target_info.values()):
    break

# 绘制结果
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(range(n+1), collision_probs, label='出现重复密码的概率')

# 添加阈值参考线及标注
colors = ['#FF6B6B', '#4D96FF', '#6BCB77']
for (target, info), color in zip(target_info.items(), colors):
    if info['n'] is not None:
        plt.axvline(x=info['n'], color=color, linestyle='--', alpha=0.7)
        plt.axhline(y=target, color=color, linestyle=':',
                    label=f'{target * 100:.0f} % 阈值 (n = {info["n"]})')

plt.xlabel('用户数量 (n)')
plt.ylabel('出现重复密码的概率')
plt.title('6 位数字密码出现重复的概率增长曲线')
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)

```

```
plt.xlim(0, max(info['n'] for info in target_info.values()) * 1.1)
plt.show()
```

使用示例:同时检测 50% 和 95% 阈值

```
exact_collision_probability(targets = [0.5, 0.95])
```

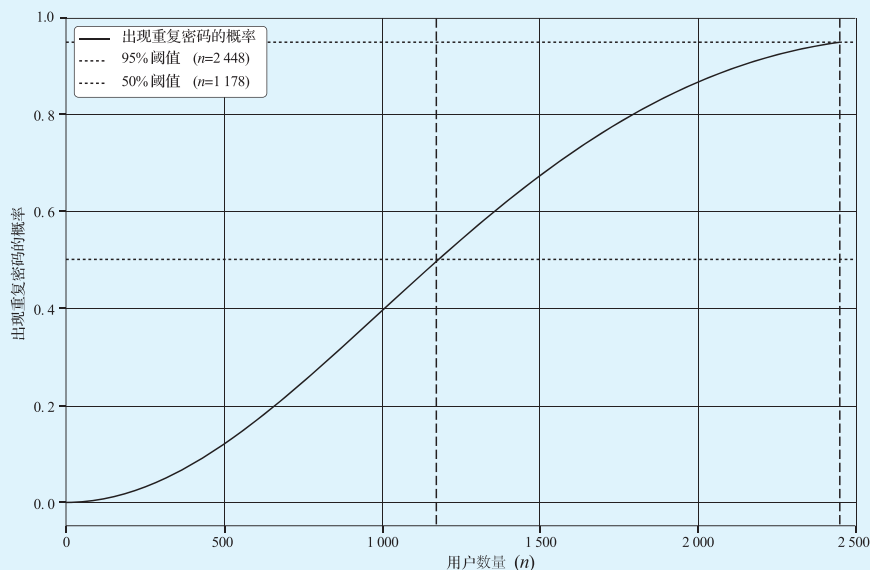


图 1.8 6 位数字密码出现重复的概率增长曲线



课后选读

贝特朗悖论

在圆内任作一弦,求其长超过圆内接正三角形边长的概率.

此问题提出之初有 3 种不同的解答:①由于对称性,可预先指定弦的方向,作垂直于此方向的直径,只有交直径于 $\frac{1}{4}$ 点与 $\frac{3}{4}$ 点间的弦,其长才大于内接正三角形边长.设所有交点是等可能的,则所求概率为 $1/2$.②由于对称性,可预先固定弦的一端,仅当弦与过此端点的切线的交角在 $60^\circ \sim 120^\circ$ 之间时,其长才合乎要求.设所有方向是等可能的,则所求概率为 $\frac{1}{3}$.③弦的中点位置唯一确定,只有当弦的中点落在半径缩小了一半的同心圆内时,其长才合乎要求.设中点位置都是等可能的,则所求概率为 $\frac{1}{4}$.这个问题之所以有不同解答,是因为当一随机试验有无穷多个可能结果时,有时很难客观地规定“等可能”这一概念.这反映了几何概率的逻辑基础是不够严密的,几何概率这类问题说明了拉普拉斯关于概率的古典定义具有很大的局限性.当严谨的概率公理化系统建立后,几何概率才能健康地发展且有广泛的应用.

● 本章巩固

一、填空题

1. 设某射手对一目标连续进行 3 次射击, 记 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次击中目标}\}$, $\bar{A}_i = \{\text{第 } i \text{ 次未击中目标}\}$ ($i = 1, 2, 3$), 试用 $A_i, \bar{A}_i$ 表示下列事件: 恰好有一次射中目标为 _____; 至少有一次射中目标为 _____.
2. 若 A, B, C 为 3 个随机事件, 则 $ABC = A$ 表示这些事件发生的关联是 _____.
3. 向单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 内随机地投下 2 点, 且这 2 点必须落在圆周内, 则这 2 点落在不同象限中的概率为 _____.
4. 袋中有 6 个小球, 其中有 4 个红球, 2 个白球. 现无放回地随机抽取 2 次, 每次只能抽取 1 个, 则第 2 次抽到白球的概率为 _____.
5. 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = 0.3, P(AB) = 0.15, P(AC) = P(BC) = 0$, 则 A, B, C 中至少有一个发生的概率为 _____.
6. 10 件产品中有 3 件次品, 从中随机抽出 2 件, 至少抽到 1 件次品的概率为 _____.

二、选择题

1. 事件“甲种产品畅销, 乙种产品滞销”的对立事件为 ().
 A. “甲种产品滞销, 乙种产品畅销” B. “甲、乙种产品均畅销”
 C. “甲、乙种产品均滞销” D. “甲种产品滞销或乙种产品畅销”
2. () 成立时, A 为 B 的逆事件.
 A. $\bar{A}$ 为 B 的逆事件 B. $AB = \emptyset$ 且 $A \cup B = \Omega$
 C. $A \cup B = \Omega$ D. $A \cup B = A$
3. 若 $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B}), P(A) = P(B)$, 则 $P(A) =$ ().
 A. 0.6 B. 0.5 C. 0.4 D. 0.3
4. 设 A, B 为互斥事件, 且 $P(A) > 0, P(B) > 0$, 则下面结论中正确的是 ().
 A. $P(B | A) = 0$ B. $P(B | A) > 0$
 C. $P(AB) = P(A)P(B)$ D. $P(B | A) = P(B)$
5. 设相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 0.25, 且 A 发生 B 不发生的概率与 A 不发生 B 发生的概率相等, 则 $P(A) =$ ().
 A. 0.6 B. 0.5 C. 0.4 D. 0.3
6. 某人忘记 6 位银行存折密码的最后一位密码, 已知他的每位密码均是取自 $0 \sim 9$ 中的数字. 因此在正确按下前 5 个密码数字后, 只能随机地试按最后一位密码数字. 每按完整的一次算作一次试操作, 则他直到第 4 次才操作成功的概率为 ().
 A. 0.25 B. 0.4 C. 0.6 D. 0.1

三、计算题

1. 证明: 对于任意事件 A, B ,
 $P(A \cup B)P(AB) \leq P(A)P(B)$.

2. 有 10 对新人参加集体婚礼. 现进行一场游戏, 随机地打乱分成 10 对, 求每对恰好是夫妻的概率.

3. 有人随机地将一个半径为 1 的圆环抛入边长为 3 的正方形内, 设圆环的圆心一定落在正方形内, 求圆环能够全部落在正方形内的概率.

4. 飞机在雨天晚点的概率为 0.7, 在晴天晚点的概率为 0.2, 天气预报称明天有雨的概率为 0.3, 求明天飞机晚点的概率.

5. 3 个箱子中, 第 1 个箱子中装有 4 个黑球、1 个白球, 第 2 个箱子中装有 5 个黑球、3 个白球, 第 3 个箱子中装有 3 个黑球、2 个白球. 现任取一个箱子, 再从该箱子中任取一球, 求:

(1) 取到的这个球恰是白球的概率;

(2) 取到的白球是来自第 1 个箱子的概率.

6. 设有来自 3 个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表, 其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份. 随机取出一个地区, 每个地区被选中的概率相等, 从选中的地区中先后抽出 2 份. 求:

(1) 求先抽到的一份是女生报名表的概率;

(2) 已知后抽到的一份是男生报名表, 求先抽到的一份是女生报名表的概率.

7. 有一电路如图 1.9 所示, 其中 1, 2, 3, 4 为继电器接点, 设各继电器接点的导通与断开相互独立, 且每一个继电器导通的概率均为 p , 求 L 至 R 为通路的概率.

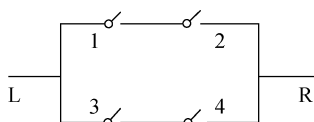


图 1.9 7 题图