"十四五"普通高等教育新形态一体化教材

线性代数

张跃进　主编

紧扣大纲
编排科学

思政融合
知识精讲

实用导向
学练结合

资源丰富
助力备考

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

『十四五』普通高等教育新形态一体化教材
线性代数
张跃进　主编
中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

"十四五"普通高等教育新形态一体化教材

大学硬笔书法教程

太极拳运动健身指导

线性代数

本社微信公众号
（请用微信"扫一扫"）

本社天猫旗舰店
（请用手机天猫APP"扫一扫"）

ISBN 978-7-5223-3576-6

定价：49.00元

“十四五”普通高等教育新形态一体化教材

线性代数

主　编　张跃进

副主编　宋瑞丽　董留栓　田晓欢

　　　　司国星

编　者　雷玉琼　郝　芳　刘　佳

　　　　许海山

中国财经出版传媒集团

中国财政经济出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 张跃进主编. -- 北京 : 中国财政经济出版社, 2024. 12. -- ISBN 978-7-5223-3576-6
Ⅰ. O151.2
中国国家版本馆 CIP 数据核字第 20243A43B4 号

策划编辑:李昊民　　责任印制:张　健
责任编辑:张怡然

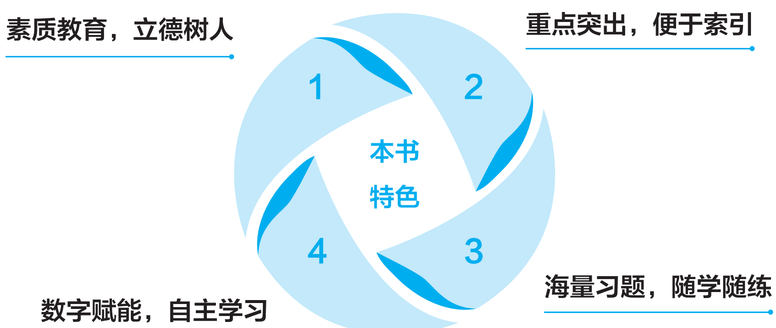
线性代数
XIANXING DAISHU
中国财政经济出版社 出版
URL:http://www.cfeph.cn
E-mail:cfeph @ cfemg.cn

社址:北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码:100142
营销中心电话:010-88191522
天猫网店:中国财政经济出版社旗舰店
网址:https://zgczjjcbs.tmall.com
廊坊市佳艺印务有限公司印刷　各地新华书店经销
成品尺寸:185mm×260mm　16 开　13.5 印张　307 000 字
2024 年 12 月第 1 版　2024 年 12 月河北第 1 次印刷
定价:49.00 元
ISBN 978-7-5223-3576-6
(图书出现印装问题,本社负责调换,电话:010-88190548)
本社质量投诉电话:010-88190744
打击盗版举报热线:010-88191661　QQ:2242791300

前言

线性代数是高等院校中非数学专业学生的基础数学课程，在高等教育中处于至关重要的地位。该学科的问题广泛渗透于自然科学、工程技术等多个领域。在特定条件下，可将许多非线性问题转化为线性问题进行有效解决。线性代数的思维、理论与方法，在科学技术、管理科学以及社会科学等诸多领域均得到了广泛的应用。党的二十大报告明确指出，教育、科技、人才是全面建设社会主义现代化国家的基础性战略性支撑。教材建设作为人才培养的关键环节，其重要性不言而喻。为了全面贯彻普通高等教育的人才培养目标，强化“新工科”背景下的人才培养数学基础，编者结合多年讲授线性代数课程的教学心得，融合团队成员的教学改革实践经验，以降低难度、确保理论适用为原则，编写本教材。教材内容强调实际应用的重要性，既体现了科学性，又保持了系统性，力求做到知识点内容由浅入深，理论阐述深入浅出，以方便教师授课和学生学习。

为学习贯彻党的二十大精神，提升课程铸魂育人效果，本教材在每个章节加入了素养园地，以引导学生践行社会主义核心价值观，提升学生的奋斗精神、爱国敬业精神、创新奉献精神、工匠精神等。本教材主要内容有行列式、矩阵、线性方程组与向量组的线性相关性、向量空间、相似矩阵及二次型。本书具有以下四个特色：



1. 素质教育，立德树人。

本教材融入思政元素及党的二十大精神，秉承能力教育与素质教育的理念，注重符合立德树人的要求，添加“素养园地”“拓展阅读”等模块，在介绍知识的同时，增加学生学习数学的趣味性，增强学生的爱国主义情怀。

2. 重点突出，便于索引。

本教材对内容性质进行了集中整理，并突出显示定义和定理，便于学生在学习过程中抓住重点，也便于学生查找。

3. 海量习题，随学随练。

为了巩固所学基础知识，强化综合能力的培养，本教材每个章节都设基础及进阶习题，帮助学生从总体上把握线性代数的基本思想与解决问题的基本方法，逐步培养学生严谨的逻辑思维能力。

4. 数字赋能，自主学习。

本教材用多媒体手段进行创新，微课以二维码形式实现资源与教材融合，方便学生随时随地扫码学习知识，培养学生自主学习习惯，提升数字化素养。

本教材为郑州经贸学院立项教材，由郑州经贸学院张跃进担任主编，并负责制定全书框架、统稿、定稿工作；由郑州经贸学院宋瑞丽，河南科技大学应用工程学院董留栓，鹤壁职业技术学院田晓欢，郑州工业安全职业学院司国星担任副主编；由郑州经贸学院雷玉琼、郝芳、刘佳、许海山担任编者。

本教材在编写过程中得到了郑州经贸学院教务处大力支持，数学教研组对本书的编写提出了许多宝贵的建议，中国财政经济出版社编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，本书难免有不足之处，衷心希望各位专家、同行和读者不吝赐教，以期不断完善。

编　　者

目录

第一章 行列式 1

1.1 排列和逆序/2
1.2 二阶、三阶行列式/4
1.3 n 阶行列式/7
1.4 行列式的性质/11
1.5 行列式按行(列)展开/16
1.6 克莱姆法则/23

第二章 矩阵 32

2.1 矩阵的概念/34
2.2 矩阵的运算/38
2.3 逆矩阵/46
2.4 分块矩阵/52
2.5 初等变换与初等矩阵/57
2.6 矩阵的秩/65
*2.7 矩阵的应用/71

第三章 线性方程组与向量组的线性相关性 79

3.1 消元法/81
3.2 向量及其线性运算/88
3.3 向量组的线性组合/90
3.4 向量组的线性相关性/93
3.5 向量组的极大无关组与秩/96
3.6 向量组的等价/100
3.7 齐次线性方程组解的结构/104
3.8 非齐次线性方程组解的结构/110
*3.9 线性方程组的应用/113

第四章 向量空间 127

4.1 向量空间及其子空间/128
4.2 基、坐标与维数/131
4.3 向量的内积/133
4.4 标准正交基/135
4.5 正交矩阵/137
4.6 基变换与坐标变换/139

第五章 相似矩阵及二次型 146

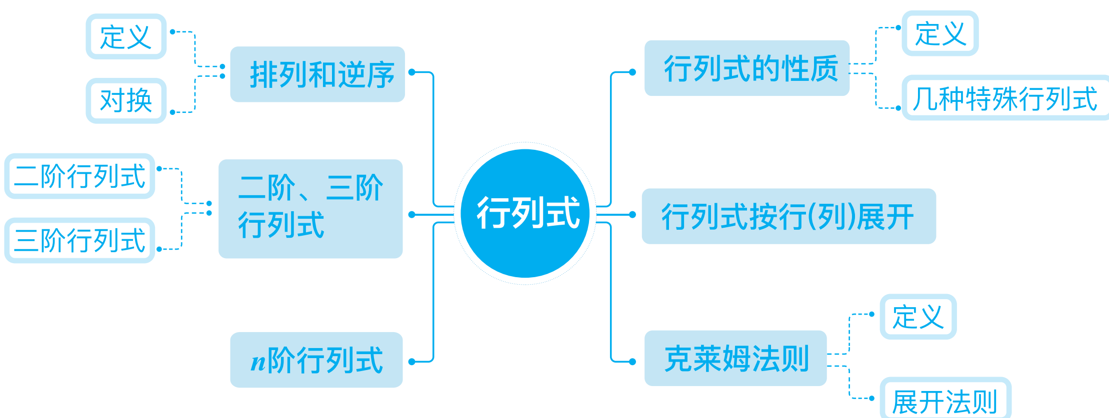
5.1 方阵的特征值与特征向量/147
5.2 相似矩阵/154
5.3 实对称矩阵的对角化/157
5.4 二次型及其矩阵/161
5.5 化二次型为标准形/164
5.6 二次型的正定性/169
*5.7 线性技术应用/173

附录一 数学建模/184
附录二 数学发展史/188
参考答案/191
参考文献/210

第一章

行列式

思维导图



本章概述

行列式是线性代数里重要的概念之一，它是由解线性方程组产生的一种算式，不但是研究线性方程组和矩阵的有力工具，而且在解决许多理论和实际应用问题中发挥着重要作用，是学习矩阵、线性方程组与向量组的线性相关性等内容的一种重要工具．

本章主要讨论行列式的概念、性质及行列式的计算．

素养园地

刘徽(约 225—约 295)，是我国数学史上一位伟大的数学家，在世界数学史上也占有杰出的地位．他所著的《九章算术注》和《海岛算经》，是我国宝贵的数学遗产之一．

在约公元 3 世纪，刘徽提出了“方阵”和“行列式”的概念，这是行列式理论在中国最早的出现．虽然当时并没有直接使用“行列式”这一名称，但刘徽的工作为后来的行列式理论奠定了基础．

我国古代数学家在行列式理论方面的卓越贡献，给当代大学生以深刻的启示：要勇于探索未知、不断追求真理；要坚持严谨的科学态度和实事求是的精神；要具备深厚的文化底蕴和家国情怀．

课前导学

学习目标

理解行列式的概念和性质；

掌握行列式的计算方法；

能应用行列式解决实际问题；

能用科学的方法分析问题和解决问题.

素养目标

灵活运用运算方法，培养计算能力及数学思维；

逐步建立学习能力，树立终身学习理念；

树立辩证思维、严谨治学的态度.

1.1 排列和逆序

微课：排列与逆序

1.1.1 排列和逆序定义

定义 1.1.1 由正整数 1，2，…，n 组成的一个没有重复数字的 n 元有序数组，称为一个 n 级排列，简称**排列**，记为$(i_1 i_2 \cdots i_n)$. $12\cdots n$ 称为**自然排列**. n 级排列总共有 $n!$个.

注意　n 级排列必须取到 1，2，…，n 这连续的 n 个自然数中的每一个数.

例如 2 级排列共有 2 种：12　21

3 级排列共有 6 种：123　132　213　231　312　321

定义 1.1.2 在一个 n 级排列$(i_1 i_2 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n)$中，若数 $i_s > i_t$，则称数 i_s 与 i_t 构成一个**逆序**，一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

根据上述定义，可按如下方法计算排列的逆序数.

设在一个 n 级排列$(i_1 i_2 \cdots i_n)$中比 $i_s(s=1，2，\cdots，n)$大的且排在 i_s 前面的数共有 s_i 个，则 i_s 的逆序的个数为 s_i，而该排列中所有自然数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数，即

$$N(i_1 i_2 \cdots i_n) = s_1 + s_2 + \cdots + s_n = \sum_{i=1}^{n} s_i .$$

例 1.1.1 求下列排列的逆序数：

(1)3241；(2)13524；(3)$nn-1\cdots 21$.

解：(1)因为 3 排在首位，故其逆序的个数为 0；

在 2 的前面比 2 大的数有 1 个，故其逆序的个数为 1；

在 4 的前面比 4 大的数有 0 个，故其逆序的个数为 0；

在 1 的前面比 1 大的数有 3 个，故其逆序的个数为 3.

易见所求排列的逆序数为

$$N(3241)=0+1+0+3=4.$$

(2)同理

$$N(13524)=0+0+0+2+1=3.$$

(3)同理

$$N(nn-1\cdots 21)=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

定义 1.1.3 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例如，例 1.1.1 中排列 3241 是偶排列，13524 是奇排列，而对排列 $n(n-1)\cdots 21$，当 $n=4k$，$n=4k+1$ 时，该排列为偶排列；当 $n=4k+2$，$4k+3$ 时，该排列为奇排列. 自然排列 $12\cdots n$ 是一个偶排列，其逆序数为零.

1.1.2 对换

定义 1.1.4 把一个排列$(i_1 i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)$中某两个数 i_s，i_t 的位置互换，而其余数不动，得到另一个排列$(i_1 i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)$，这样的变换称为一个**对换**，记为$(i_s, i_t)$. 将两个相邻元素对换，称为**相邻对换**.

例如，对排列 1234 施以对换(1，4)后得到排列 4321.

对换有如下性质：

定理 1.1.1 任意一个排列经过一个对换后，其奇偶性改变.

这就是说，经过一次对换，奇排列变为偶排列，偶排列变为奇排列.

证明 先看相邻对换的情况.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$，显然 a_1，…，a_l，b_1，…，b_m 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a，b 两元素的逆序数变化情况为：

当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；

当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1.

所以，排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再看一般情况.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$，对它做 m 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$；再做 $m+1$ 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$. 总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性也不同.

练习题 1.1

求下列排列的逆序数，并确定排列的奇偶性：

(1)351426；　　　　(2)7135246；

(3)215479683；　　(4)$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n-2)(2n)$.

1.2 二阶、三阶行列式

微课：二阶与三阶行列式

1.2.1 二阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}. \tag{1.2.1}$$

其中，x_1，x_2 代表未知量，$a_{ij}(i=1, 2; j=1, 2)$代表未知量的系数，b_1，b_2 代表常数项．用消元法从(1.2.1)式中消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2,$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$

同样地，从(1.2.1)式中消去 x_1，得

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$

x_1，x_2 即为方程组(1.2.1)的解．

为便于叙述和记忆，我们引入二阶行列式的概念．

定义 1.2.1　我们称

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.2.2}$$

为二阶行列式，其中数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}叫作行列式的**元素**，横排叫作**行**，竖排叫作**列**．元素的第一个下标 i 叫作**行标**，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 叫作**列标**，表明该元素位于第 j 列．由上述定义可知，二阶行列式是由 4 个数按一定的规律运算所得的代数和，这种计算方法称为行列式的“**对角线法则**”．如图 1-1 所示．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1-1　对角线法则图

把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**次对角线**，于是，二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去次对角线上两元素之积．

注意　把排列与逆序的定义结合起来，我们观察到二阶行列式每项的符号是：当该项元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，奇排列则取负号．本节后面讨论的三阶行列式也有同样的规律．

由此规则：

当 $D\neq 0$ 时，二元线性方程组(1.2.1)的解就唯一地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{1.2.3}$$

其中，分母 D 是由方程组(1.2.1)的系数所确定的二阶行列式，即系数行列式．x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}，a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}，a_{22} 所得的二阶行列式．本节后面讨论的三元线性方程组有类似的规律性，请同学们学习时注意比较．

例 1.2.1　用二阶行列式解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2=-1\\ 5x_1+3x_2=3\end{cases}.$$

解： 计算二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{vmatrix}=1,\ D_1=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=-6,\ D_2=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{vmatrix}=11$$

由公式(1.2.3)得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-6,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=11.$$

1.2.2 三阶行列式

解三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}. \tag{1.2.4}$$

求解此方程组，可由前两个方程消去 x_3，得到一个只含 x_1，x_2 的二元方程；再由后两个方程消去 x_3，得到另一个只含 x_1，x_2 的二元方程，这样得到一个含两个未知量的二元线性方程组，按照上述解二元线性方程组的方法，消去 x_2，得

$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32}$.

把 x_1 的系数记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{1.2.5}$$

定义 1.2.2 我们称(1.2.5)为**三阶行列式**.

由上述定义可见，三阶行列式是由三行、三列 9 个元素组成的一个符号，展开式是 6 项的代数和，每项是由不同行、不同列的 3 个元素相乘而成，3 项正、3 项负，其中正项是各实线上 3 个元素乘积；负项是各虚线上的 3 个元素的乘积．即

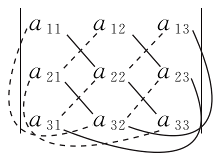


图 1-2 对角线法则图

这种展开法称为行列式的**对角线法则**.

注意 (1)对角线法则只适用于二阶和三阶行列式.

(2)三阶行列式每项的符号是：当该项元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，奇排列则取负号.

我们称(1.2.5)式中的 D 为三元线性方程(1.2.4)的**系数行列式**．根据上面的算法，有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

若系数行列式 $D\neq 0$，那么该方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 1.2.2 求解三元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=4 \\ x_1-x_2+2x_3=5 \\ 2x_1-x_2+x_3=3 \end{cases}$.

解： 用对角线法计算行列式，得

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8,\quad D_1=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3&4&-1\\1&5&2\\2&3&1\end{vmatrix}=16,\ D_3=\begin{vmatrix}3&2&4\\1&-1&5\\2&-1&3\end{vmatrix}=24,$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=3.$$

练习题 1.2

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix}a&b\\a^2&b^2\end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix}1&\log_b a\\\log_a b&1\end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-4&-1\\-1&8&3\end{vmatrix}$；　(5) $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}$.

2. 证明等式：

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2&c_2\\a_3&c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}.$$

3. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}2x_1+3x_2=5\\x_1-4x_2=-3\end{cases}$；　(2) $\begin{cases}x_1\cos\theta-x_2\sin\theta=a\\x_1\sin\theta+x_2\cos\theta=b\end{cases}$；　(3) $\begin{cases}2x_1-3x_2+2x_3=-3\\x_1+4x_2-3x_3=6\\3x_1-x_2-x_3=1\end{cases}$.

1.3 n 阶行列式

微课：n 阶行列式的定义

用对角线法计算二阶、三阶行列式，虽然简便直观，但对高于三阶的行列式，该方法就不适用了，为了求解 $n>3$ 的线性方程组，有必要把二阶、三阶行列式的概念做进一步推广．为此，先对二阶、三阶行列式的特点加以总结．

以三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

为例，可见：

(1)三阶行列式共有 $6=3!$ 项；

(2)每项都是取自不同行、不同列的 3 个元素的乘积；

(3)每项的符号是：当该项元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，奇排列则取负号 .

所以，三阶行列式可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{N(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

其中，$\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$ 为对所有 3 级排列 $j_1 j_2 j_3$ 求和 .

定义 1.3.1 由 n 行 n 列、n^2 个元素 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$构成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

称为 ***n* 阶行列式**，其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和. 行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$，这里 a_{ij} 称为行列式的元素，称

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

为行列式的一般项 .

文本：第一章 拓展 1

注意 行列式概念中包含以下内容：

(1)行列式由 n 行 n 列、n^2 个元素组成；

(2)行列式由 $n!$ 项求和而成，每项是取自不同行、不同列的 n 个元素乘积，每项各元素行标按自然数顺序排列后就是行列式的一般项形式：

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

(3)若行列式每项都写成一般项的形式，其中$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)}$是该项的符号，且列序构成 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$，若此排列为奇排列则此项取负号，若此排列为偶排列则此项取正号，所以行列式项为 $n!$ 项的代数和，它是一个数 .

例 1.3.1 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这个行列式主对角线上方的元素都为零，称它为**下三角行列式**(主对角线下方的元素为零的行列式，称为**上三角行列式**).

解： 主要考查 D 的展开式中不为零的那些项 . 由于第一行除 a_{11} 外其余元素都为零，所以行列式的通项中第一个元素 a_{1j_1} 只能取 a_{11}；而第二个元素 a_{2j_2} 不能选取 a_{21}，这是因

为展开式的每一项中不能存在两个同列的元素，故只能选取 a_{22}；同理元素 a_{3j_3} 只能取 a_{33}；……末行只能选取 a_{nn}. 从而

$$D=(-1)^{N(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理有几种特殊的行列式

上三角行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

下三角行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

主对角行列式 $\Lambda=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

次对角行列式 $\Lambda=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

如果我们把 n 阶行列式每项的列标按自然顺序排列，则行标是 n 级排列中的某一个排列，这样便得到行列式的另一个定义式

$$D=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}. \tag{1.3.1}$$

因为把 n 阶行列式 D 的一般项

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

的列标排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 经 N 次对换变成自然排列 $1\ 2\cdots n$ 的同时，相应的行标排列 $1\ 2\cdots n$ 经 N 次对换就变成了排列 $j_1j_2\cdots j_n$. 即

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$$

根据定理 1.1.1 的推论，对换次数 N 与 $N(i_1i_2\cdots i_n)$有相同的奇偶性，而 N 与 $N(j_1j_2\cdots j_n)$也有相同的奇偶性，从而 $N(i_1i_2\cdots i_n)$与 $N(j_1j_2\cdots j_n)$有相同的奇偶性，所以

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn},$$

因此可得(1.3.1)式是行列式的等价定义.

n 阶行列式 D 的一般项还可以记为

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \qquad (1.3.2)$$

其中$(i_1i_2\cdots i_n)$与$(j_1j_2\cdots j_n)$均为 n 级排列 .（请同学们自己证明此结论）

例 1.3.2 在 6 阶行列式中，确定下列两项应带的符号 .

(1)$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$；(2)$a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$.

解：(1)由定义 1.3.1，可得

$$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}=a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65},$$

$N(431265)=0+1+2+2+0+1=6$，所以 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$前面应带正号 .

(2)由(1.3.2)式，可得

行标排列的逆序数 $N(341562)=0+0+2+0+0+4=6$，

列标排列的逆序数 $N(234165)=0+0+0+3+0+1=4$，

所以 $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$前面应带正号 .

例 1.3.3 利用行列式的定义计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

解：
$$\begin{aligned} D_n &=(-1)^{N[(n-1)(n-2)\cdots 1]}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{nn} \\ &=(-1)^{N[(n-1)(n-2)\cdots 1]}1\times 2\cdots(n-1)n=(-1)^{N[(n-1)(n-2)\cdots 1]}n! \end{aligned}$$

所以
$$D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!\ .$$

练习题 1.3

1. 确定下列 5 阶行列式的项所带的符号：

(1)$a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54}$；　　(2)$a_{24}a_{32}a_{15}a_{43}a_{51}$.

2. 写出 4 阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$的项 .

3. 设 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上元素为零，证明该行列式的值为零 .

4. 用行列式定义确定下列行列式的展开式中项 x^3，x^4 的系数 .

$$\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & x-2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & x & 0 \\ 5 & 3 & 1 & x-1 \end{vmatrix}.$$

5. 利用行列式的定义计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.4 行列式的性质

微课：行列式的性质

从上节的学习中我们了解到在计算行列式时，如果行列式为对角形、三角形或是所含有的零元素较多，那么这个行列式的值就比较容易给出．而对于一般的行列式来讲，这种方法就显得比较烦琐了．下面将介绍行列式的基本性质，利用这些性质可以大大简化行列式的计算．

定义 1.4.1 将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T} 或 D'，即

$$\text{若 } D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\text{，则 } D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由定义可知，行列式 D 中第 i 行第 j 列上的元素 a_{ij}，即为 D^{T} 中的第 j 行第 i 列位置上的元素 a_{ji}.

性质 1.4.1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

证明 设 D^{T} 的第 i 行第 j 列元素为 a'_{ij}，由转置定义 $a'_{ij}=a_{ji}$ 及(1.3.1)式有

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{(j_1\cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 j_2\cdots j_n)} a'_{j_1 1} a'_{j_2 2}\cdots a'_{j_n n} \\ &= \sum_{(j_1\cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 j_2\cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2}\cdots a_{n j_n} = D. \end{aligned}$$

注意 性质 1.4.1 说明行列式的行和列具有同等地位，因而凡是对行具有的性质，对列也一样具有，反之亦然，故以下所讨论的行列式性质中，只对行的情况加以证明．

性质 1.4.2 用一个数 k 乘行列式，等于将行列式的某一行(列)元素都乘以 k. 即

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

也可以说，若行列式某行(列)有公因子 k，则可以把它提到行列式外面(证明略).

性质 1.4.3 若对换行列式的任意两行(列)，则行列式变号.

证明 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

要证性质 1.4.3，即要证 $D=-D_1$. 因为 D 中的任一项为

$$(-1)^{N(i_1\cdots p\cdots q\cdots i_n)}a_{1i_1}\cdots a_{ip}\cdots a_{jq}\cdots a_{ni_n},$$

与之相对的 D_1 中的一项为

$$(-1)^{N(i_1\cdots q\cdots p\cdots i_n)}a_{1i_1}\cdots a_{jq}\cdots a_{jp}\cdots a_{ni_n},$$

由定理 1.1.1，有

$$(-1)^{N(i_1\cdots p\cdots q\cdots i_n)}=(-1)(-1)^{N(i_1\cdots q\cdots p\cdots i_n)},$$

即 D 与 D_1 对应项的符号相反，亦即 $D=-D_1$.

推论 1.4.1 若行列式的任意两行(列)相同，则行列式等于零.

证明 设 D 是第 i 行与第 j 行相同的行列式，把 D 的第 i 行与第 j 行对换. 由性质 1.4.3，有$D=-D$，即 $D=0$.

推论 1.4.2 若行列式的任意两行(列)元素成比例，则行列式等于零.

性质 1.4.4 若行列式的某行(列)的元素都是两数之和，则这个行列式等于两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

或者说，若两个行列式中除第 i 行之外，其余 $n-1$ 行对应相同，则两个行列式之和只对第 i 行对应元素相加，其余行保持不变.

证明　左边 $=\sum\limits_{(i_1\cdots i_n)}(-1)^{N(i_1\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots(a_{ip}+b_{ip})\cdots a_{ni_n}$

$$=\sum_{(i_1\cdots i_n)}(-1)^{N(i_1\cdots i_n)}a_{1i_1}\cdots a_{ip}\cdots a_{ni_n}+\sum_{(i_1\cdots i_n)}(-1)^{N(i_1\cdots i_n)}a_{1i_1}\cdots b_{ip}\cdots a_{ni_n}$$

这正好是右边两行列式之和．

性质 1.4.5　若把行列式的第 j 行(列)元素的 k 倍加到第 i 行(列)的对应元素上，则行列式的值不变，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1}+a_{i1} & ka_{j2}+a_{i2} & \cdots & ka_{jn}+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明　由性质 1.4.4，上式右边的行列式可拆为两个行列式之和，再利用性质 1.4.3 的推论 1.4.2，即可得证．

下面我们将应用行列式的性质来计算行列式．我们约定：

r：表示行列式的行；

c：表示行列式的列；

$r_i+\lambda r_k$：表示行列式的第 k 行乘以 λ 后加到第 i 行；

$c_i+\lambda c_k$：表示行列式的第 k 列乘以 λ 后加到第 i 列；

$r_i\leftrightarrow r_k$：表示互换行列式的两行；

$c_i\leftrightarrow c_k$：表示互换行列式的两列；

$r_i\times\lambda$：表示行列式的第 i 行乘以 λ；

$r(i)$：表示行列式按第 i 行展开；

$c(i)$：表示行列式按第 i 列展开．

例 1.4.1　计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

解：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4-2r_1]{r_3+r_1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+3r_2]{r_3+r_2}\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&2\\0&0&-2&4\\0&0&-2&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&2\\0&0&-2&4\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=-4.$$

例 1.4.2 计算 $D=\begin{vmatrix}a_1&-a_1&0&0\\0&a_2&-a_2&0\\0&0&a_3&-a_3\\1&1&1&1\end{vmatrix}$.

解：

$$D\xlongequal{c_2+c_1}\begin{vmatrix}a_1&0&0&0\\0&a_2&-a_2&0\\0&0&a_3&-a_3\\1&2&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_2}\begin{vmatrix}a_1&0&0&0\\0&a_2&0&0\\0&0&a_3&-a_3\\1&2&3&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_4+c_3}\begin{vmatrix}a_1&0&0&0\\0&a_2&0&0\\0&0&a_3&0\\1&2&3&4\end{vmatrix}$$

$=4a_1a_2a_3$.

例 1.4.3 计算 n 阶行列式.

$$D_n=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}.$$

解： $D_n=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+(n-1)a&x+(n-1)a&\cdots&x+(n-1)a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

例 1.4.4 设

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}&0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{k1}&\cdots&a_{kk}&0&\cdots&0\\c_{11}&\cdots&c_{1k}&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&\cdots&c_{nk}&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}\\\vdots&&\vdots\\a_{k1}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix},$$