出 版 人 李 东
责任编辑 王玉栋
责任校对 贾静芳
责任印制 叶小峰

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/薛利敏主编. —2版.—北京:教育科学出版社,2020.7
“十三五”高等职业教育云教学系列教材
ISBN 978-7-5191-2227-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①薛… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2020)第115998号

“十三五”高等职业教育云教学系列教材
高等数学(第二版)
GAODENG SHUXUE

出版发行	教育科学出版社		
社　　址	北京·朝阳区安慧北里安园甲9号	**邮　　编**	100101
总编室电话	010—64981290	**编辑部电话**	010—64981329
出版部电话	010—64989487	**市场部电话**	010—64989009
传　　真	010—64891796	**网　　址**	http://www.esph.com.cn
经　　销	各地新华书店		
印　　刷	天津市蓟县宏图印务有限公司	**版　　次**	2012年2月第1版
开　　本	787毫米×1092毫米　1/16		2020年7月第2版
印　　张	21	**印　　次**	2020年7月第1次印刷
字　　数	523千	**定　　价**	49.00元

前　言

PREFACE

高等数学是高等学校理工类各专业必修的基础理论课程。高等数学的主要研究对象是函数(函数是从量的角度抽象描述自然现象或社会现象中的运动变化,是刻画某一运动变化过程中变量之间依存关系的一种数学模型),主要研究函数的微积分学。高等数学的内容一般包括一元函数微积分学、多元函数微积分学、无穷级数、空间解析几何和常微分方程。

通过高等数学的教学,我们要达到两个目标:一是使学生获得高等数学的基本概念、基本理论、基本方法和基本运算技能,为学习各类后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的和坚实的数学基础;二是努力培养学生的数学素养,即通过各教学环节,逐步培养学生的辩证唯物主义思想,抽象思维能力和逻辑思维能力,综合运用所学知识分析和解决实际问题的能力,初步抽象概括问题的能力,较强的自主学习能力,以及创新精神和创新能力。

为了达到高等数学教学的目标,我们努力编写了一本适合高职高专理工类各专业的高等数学教材。本教材具有以下特点。

1.针对性强

本教材根据《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和高职高专学生实际编写而成,适合高职高专理工类各专业的学生使用,具有较强的针对性。本书结构安排合理,内容由浅入深,从基础理论到应用逐层递进,便于学生学习。

2.科学性强

本教材的编写以“研究性学习”理念为指导。“研究性学习”是一种建构性的、追求协商的、尊重个性的、以人为本的“体验式学习”。“研究性学习”的关键是要在学习的各个阶段提出适当的研究问题,以便在学习过程中为学生创造能亲自体验地进行研究性学习的平台。本教材在介绍基本概念、基本理论的同时,精心设计了一些研究性问题供学生研究探讨,比如,为什么要引进左、右极限,左、右导数,等等,让学生知道为什么引进以及如何引进这些概念的。

3.操作性强

针对学生存在基础不同、接受能力不同、个性有差异等情况，我们引入和叙述基本概念、基本理论时，先从几何直观、实际问题引入概念，然后上升到理论，便于学生理解和接受。在例题的选编上，考虑了基础型、提高型、研究创新型等各种类型，这样教师教学时便于操作。由于不同的专业对高等数学的要求不同，其中带 * 的部分，可供某些对高等数学要求较高的专业选用，因此教材具有一定的弹性。

4.实用性强

本教材在习题的选配上，兼顾了理论方法的练习和实际应用的练习，合理配置了基本题和提高题的数量。每节后配备了一定梯度、数量适当的习题，每章后还配备了总习题，题型均采用当今普通高等教育专升本高等数学考试的试题形式，分为选择题、填空题、计算题、证明题和应用题等，习题选用了部分省市专升本的真题，可供专升本学生学习与借鉴，为专升本学生提供帮助。

对本教材的编写，我们进行了充分的准备工作，组织参编单位的专家教授，召开了多次教材编写研讨会，拟定了教材编写大纲、教材主要内容和教材编写特色。本教材主编为渭南师范学院薛利敏教授；副主编有赤峰学院杨冀林，华北水利水电学院程鹏，中国人民解放军国际关系学院夏正仁，湖南信息职业技术学院张钟德以及运城职业技术大学曹帅雷；编者有赤峰学院敖恩，湖南信息职业技术学院尹屹，安阳师范学院董永刚和韩卫卫，潞安职业技术学院李小娥，中国人民解放军国际关系学院闻杰、朱永婷和刘玉霞以及湖南民族职业学院黄文峰和李博。本教材由薛利敏教授完成统稿工作。

尽管我们的初衷是编写一本能奠定数学基础、传授数学思想、培养数学素养、介绍数学方法、可读性强和便于教学的好书，但由于编者水平所限，书中的缺点、错误在所难免，恳请各位同行不吝赐教，诚请读者批评指正。

编　者

目　录

CONTENTS

第 1 章　函数与极限

第 2 章　导数与微分

第 7 章　多元函数微分学

第 8 章　多元函数积分学

第 9 章　无穷级数

第 1 章

函数与极限

高等数学的主要研究对象是函数，研究任务是函数的各种性态，特别是函数的微分和积分.极限理论是微积分的基本理论，极限方法是微积分的基本分析方法，是研究函数的重要工具.本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础.

1.1 函 数

1.1.1 区间和邻域

设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，称集合 $\{x\,|\,a<x<b, x\in\mathbf{R}\}$ 为开区间，记作 (a,b)，它在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段(如图 1－1 所示)；称集合 $\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b, x\in\mathbf{R}\}$ 为闭区间，记作 $[a,b]$(如图 1－2所示)；类似地，称 $\{x\,|\,a\leqslant x<b, x\in\mathbf{R}\}$ 为左闭右开区间，$\{x\,|\,a<x\leqslant b, x\in\mathbf{R}\}$ 为左开右闭区间，分别记作 $[a,b)$ 和 $(a,b]$.

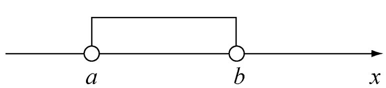

图 1－1

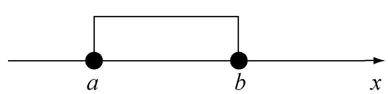

图 1－2

另外，记 $(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$，$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b, x\in\mathbf{R}\}$，$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a, x\in\mathbf{R}\}$.

设 $x_0\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，称集合 $\{x\,|\,|x-x_0|<\delta, x\in\mathbf{R}\}$ 为 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，其中 x_0 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径.即 $U(x_0,\delta)=(x_0-\delta, x_0+\delta)$(如图 1－3 所示).特别地，不包含中心点的邻域称为去心邻域，记作

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=U(x_0,\delta)-\{x_0\}=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta, x\in\mathbf{R}\}.$$

邻域的左半部分和右半部分分别称为左邻域和右邻域，分别记作 $U^-(x_0,\delta)$ 和 $U^+(x_0,\delta)$.容易知道，$U^-(x_0,\delta)=(x_0-\delta, x_0)$，$U^+(x_0,\delta)=(x_0, x_0+\delta)$.

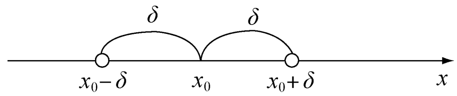

图 1—3

1.1.2 函数

定义 1

设 D 为非空的实数集,x 和 y 为两个变量,如果对于每一个 $x\in D$,按照对应法则 f,都有唯一确定的 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$.其中,x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为函数的定义域,记作 D_f,对于 $x\in D$,称其对应的值 y 为 x 的函数值,当 x 取遍 D 的每一个值的时候,函数值的全体组成的集合称为函数的值域,记作 $f(D)$ 或 R_f,即 $R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$.

由定义可知,确定一个函数需确定函数的定义域和对应法则,因此,我们也称定义域和对应法则为函数的两个要素.如果两个函数 f 和 g 的定义域与对应法则相同,则称这两个函数相同.

例 1 函数 $y=2\ln x$ 与 $y=\ln x^2$ 是否为同一个函数?

解 $y=2\ln x$ 的定义域为 $\{x\mid x>0,x\in\mathbf{R}\}$,$y=\ln x^2$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq 0\}$.两个函数的定义域不同.故这两个函数为不同的函数.

例 2 求函数 $y=\dfrac{1}{\lg(x-1)}$ 的定义域.

解 要使函数有意义,即要求 $\lg(x-1)\neq 0$,且 $x-1>0$.

因此,函数 $y=\dfrac{1}{\lg(x-1)}$ 的定义域为 $\{x\mid x>1,x\neq 2\}$.

例 3 设 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$,求 $f\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$.

解 $f\left(\dfrac{2}{\pi}\right)=\dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{1}{\frac{2}{\pi}}=\dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2}{\pi}$.

函数的表示方法一般有三种:表格法,图像法,解析法.特别要说明的是,存在着分段表示的函数,即在自变量的不同变化范围内,对应法则用不同的式子来表示的函数.

例 4 设符号函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(-1),f(0),f(1)$.

解 这个函数的定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $\{-1,0,1\}$.x 在不同的变化范围内,对应法则有不同的式子表示,是个分段函数.因为 $-1<0$,故 $f(-1)=-1$,同理,$f(0)=0$,$f(1)=1$.

其图像如图 1—4 所示.

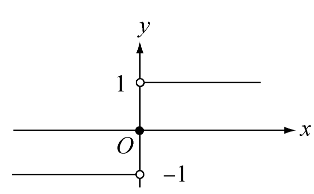

图 1—4

定义 2

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$,值域为 R_f.如果对每一个 $y\in R_f$,都有唯一一个$x\in D$,使得 $f(x)=y$,那么就确定了一个以 y 为自变量的函数,称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$.

由于习惯上用 x 表示自变量,y 表示因变量.因此,一般地,$y=f(x)$,$x\in D$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$,$x\in f(D)$.

1.1.3 函数的性质

在中学阶段,我们已经学习了函数的几个简单的性质,例如单调性、奇偶性等.现在我们重新来认识这些性质并引入一个新的性质,即有界性.

定义 3

设 $f(x)$定义在区间 I 上,对任意的 $x_1,x_2\in I$.当 $x_1<x_2$时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上单调增加;当 $x_1<x_2$时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数$f(x)$在区间 I 上单调减少.

定义 4

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则 $-x\in D$).如果对于任意的 $x\in D$,有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$为奇函数.如果对于任意的 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$为偶函数.

由定义可知:奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称.在判断一个函数为奇函数还是偶函数的时候,我们也常常用 $f(x)\pm f(-x)=0$ 来判断.

当然也存在着非奇非偶函数,例如 $f(x)=x+\cos x$.

例 5 证明函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$为奇函数.

证明 函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,关于原点对称.另外,$f(x)+f(-x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln 1=0$.即 $f(x)=-f(-x)$.所以函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$为奇函数.

定义 5

设函数 $f(x)$的定义域为 D,若存在常数 $T>0$,使得对任意的 $x\in D$,有$x+T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$为周期函数,T 称为 $f(x)$的周期.

由定义可知:周期为 T 的函数,在定义域内长度为 T 的区间上,函数的图像有相同的形状.

例如,函数 $f(x)=\sin x$,$f(x)=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数.在以 2π 为长度的区间上函数的图像有相同的形状.

定义 6

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在正数 M，使得对任意的 $x \in I$，都有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界，也称 $f(x)$ 是区间 I 上的有界函数；如果这样的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

在高等数学中，我们常用符号"$\exists$"表示存在，用符号"$\forall$"表示任意.故函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界也可以用下面的语言叙述：若 $\exists M>0$，使得对 $\forall x \in I$，都有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界；若对 $\forall M>0$，总存在 $x_0 \in I$，使得 $|f(x_0)|>M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

例 6 证明 $f(x)=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界.

证明 函数 $f(x)$ 的值域是 $[-1,1]$，故 $\exists 1>0$，使得对 $\forall x \in \mathbf{R}$，都有 $|\sin x| \leqslant 1$.故 $f(x)=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界.

再如：函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在闭区间 $[1,2]$ 上有界，但在开区间 $(0,1)$ 内无界.

定义 7

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若 $\exists M>0$，使得对 $\forall x \in I$，都有 $f(x) \leqslant M$ $(f(x) \geqslant M)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有上界（下界），也称 $f(x)$ 是 I 上有上界（下界）函数.

显然，有界函数必有上界和下界；反之，既有上界又有下界的函数必是有界函数.

例如，$f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内无上界但有下界，故在区间 $(-\infty,0)$ 内这个函数不是有界函数.

习题 1.1

1.用区间表示下列不等式的解.

(1) $x^2 \leqslant 9$； (2) $|x-2|<1$；

(3) $x^2-5x-6<0$.

2.判断下列函数是否是同一个函数.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ 与 $g(x)=x-3$； (2) $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=x$；

(3) $f(x)=\ln\dfrac{x}{x-1}$ 与 $g(x)=\ln x-\ln(x-1)$.

3.判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x+2x^3$； (2) $f(x)=x^2\cos x$；

(3) $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{3}$.

4.判断下列函数的单调性.

(1) $f(x)=x^2+1$； (2) $f(x)=\ln x$.

1.2 初等函数

在函数中，有一类函数我们经常要用到，这一类函数非常重要，即初等函数.由于初等函数是由基本初等函数构成的，所以我们先介绍基本初等函数.

1.2.1 基本初等函数

下列五种函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数称为基本初等函数.基本初等函数在中学已经学习过，在这里我们仅介绍它们的基本性态.

1.幂函数

幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$（α 为任意常数）的定义域和值域因 α 的不同而不同，但在$(0,+\infty)$内都有定义，且图像都过点$(1,1)$.

现在以 $f(x)=x^2$ 为例，函数 $f(x)=x^2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$[0,+\infty)$；在$(-\infty,0]$是单调减少的，在$[0,+\infty)$是单调增加的；在 $\mathbf{R}$ 上为偶函数，不是周期函数，也不是有界函数，但有下界.

图 1—5 给出了常见的几种幂函数的图像.

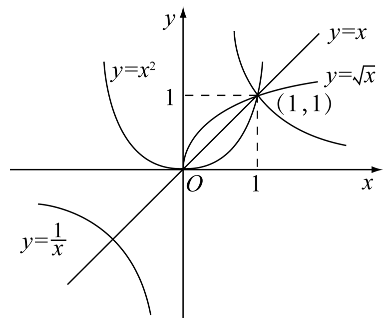

图 1—5

2.指数函数

指数函数 $f(x)=a^x$（$a>0,a\neq1$）的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$，图像都经过点$(0,1)$.当 $a>1$ 时，$f(x)=a^x$ 是单调增加的；当 $0<a<1$ 时，$f(x)=a^x$ 是单调减少的.指数函数 $f(x)=a^x$（$a>0,a\neq1$）在定义域上是非奇非偶函数，不是周期函数，也不是有界函数，但有下界.如图 1—6 所示.

3. 对数函数

对数函数 $f(x)=\log_a x$（$a>0,a\neq1$）的定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，图像都经过点$(1,0)$.当 $a>1$ 时，$f(x)=\log_a x$ 是单调增加的；当 $0<a<1$ 时，$f(x)=\log_a x$ 是单调减少的.对数函数 $f(x)=\log_a x$（$a>0,a\neq1$）在定义域上是非奇非偶函数，不是周期函数，也不是有界函数.如图 1—7 所示.

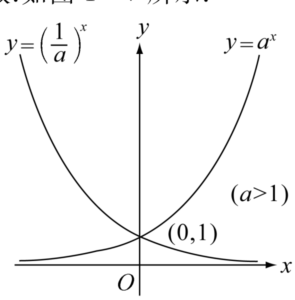

图 1—6

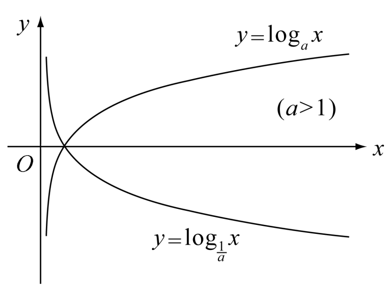

图 1—7

当 $a=\mathrm{e}$ 时，$f(x)=\log_a x$ 简记为 $f(x)=\ln x$.这个常见的对数函数称为自然对数，其中 $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 为无理数.

4.三角函数

三角函数有：正弦函数 $f(x)=\sin x$，余弦函数 $f(x)=\cos x$，正切函数 $f(x)=\tan x$，余切函数 $f(x)=\cot x$，正割函数 $f(x)=\sec x$ 和余割函数 $f(x)=\csc x$.

$f(x)=\sin x$ 和 $f(x)=\cos x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$；它们在定义域内不是单调函数，但是在某个区间上是单调的；$f(x)=\sin x$ 是奇函数，$f(x)=\cos x$ 是偶函数；它们都是以 2π 为周期的周期函数；它们都是有界函数.如图 1－8、图 1－9 所示.

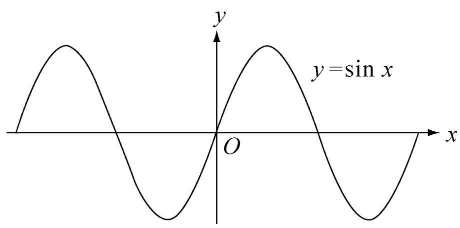

图 1－8

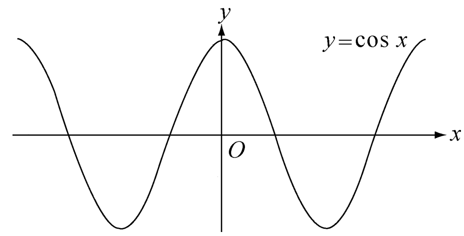

图 1－9

$f(x)=\tan x$ 的定义域是 $\left\{x \mid x\in\mathbf{R}, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\text{ 为整数}\right\}$，值域是 $\mathbf{R}$；它在定义域上不是单调的函数，但是在某个区间上是单调的；它是以 π 为周期的奇函数；它是无界函数.

$f(x)=\cot x$ 的定义域是 $\{x \mid x\in\mathbf{R}, x\neq k\pi, k\text{ 为整数}\}$，值域是 $\mathbf{R}$；它在定义域上不是单调函数，但是在某个区间上是单调的；它是以 π 为周期的奇函数；它是无界函数.

正割函数 $f(x)=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，余割函数 $f(x)=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.它们的性质可以根据 $\cos x$ 和 $\sin x$ 得到.

5.反三角函数

反三角函数是各个三角函数在其特定的单调区间上的反函数.

反正弦函数 $f(x)=\arcsin x$ 是正弦函数 $\sin x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$；它在 $[-1,1]$ 上为单调增加的有界函数.

反余弦函数 $f(x)=\arccos x$ 是余弦函数 $\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的反函数，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$；它在 $[-1,1]$ 上为单调减少的有界函数.

反正切函数 $f(x)=\arctan x$ 是正切函数 $\tan x$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的反函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$；它在定义域上为单调增加的有界函数.

反余切函数 $f(x)=\operatorname{arccot} x$ 是余切函数 $\cot x$ 在区间 $(0,\pi)$ 内的反函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$；它在定义域上为单调减少的有界函数.

1.2.2 复合函数与初等函数

定义 1

设函数 $y=f(u)$，$u\in D_f$ 及 $u=\varphi(x)$，$x\in D_\varphi$，且 $\varphi(D_\varphi)\subset D_f$，则 y 通过变量 u 称为 x 的函数，称它为由 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 构成的复合函数，记作 $f(\varphi(x))$，u 称为中间变量.

例 1 求由函数 $y=\ln u$，$u=1-x$ 复合而成的复合函数，并求复合函数的定义域.

解 由 $y=\ln u$，$u=1-x$ 复合而成的复合函数为 $y=\ln(1-x)$. 因为 $u>0$，所以要求 $1-x>0$，故复合函数的定义域为 $(-\infty,1)$.

例 2 分析函数 $y=e^{\sqrt{1+x}}$ 的复合结构.

解 函数 $y=e^{\sqrt{1+x}}$ 可以看成由 $y=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1+x$ 三个函数复合而成.

定义 2

由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成的，并能用一个解析式表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\dfrac{x^2+\sin x}{x-1}$，$y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$ 都是初等函数.

习题 1.2

1. 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}+\sqrt{x-1}$；

(3) $f(x)=\ln\dfrac{1}{x-1}$.

2. 分析下列函数的复合结构.

(1) $f(x)=\ln\dfrac{1}{1+x^2}$；　　(2) $f(x)=\arcsin(\sqrt{1-x^2})$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

3. 求下列函数的反函数.

(1) $f(x)=\sin 3x$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$；　　(2) $f(x)=2^x-1$.

1.3 数列的极限

极限是高等数学中最基本的一个概念，极限以及极限的思维方法贯穿高等数学的始终．在微积分中，几乎所有的概念都是通过极限来定义的，所以准确理解极限的概念、掌握极限的计算方法是学好高等数学的基础．

1.3.1 数列的概念

直观上说，数列就是将一些数按照一定的次序排成一列，这样的一列数就称为数列．

定义 1

定义在自然数集上的函数 $x_n=f(n)(n=1,2,3,\cdots)$，其函数值按自变量 n 的大小顺序排成一列 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$，称为一个数列，简记为 $\{x_n\}$．数列中的每一个数叫作数列的项，第 n 项 x_n 称为数列的一般项或通项．

例如，数列 $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$ 的通项 $x_n=\frac{n}{n+1}$．

既然数列是特殊的函数，所以可以仿照定义函数的单调性和有界性来定义单调数列和有界数列．

定义 2

若数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots\leqslant x_{n-1}\leqslant x_n\leqslant\cdots$，则称数列 $\{x_n\}$ 单调递增；若数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant\cdots\geqslant x_{n-1}\geqslant x_n\geqslant\cdots$，则称数列 $\{x_n\}$ 单调递减．

例如，数列 $\{2^n\}$ 单调递增；数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 单调递减．

定义 3

设数列 $\{x_n\}$，如果存在正数 M，使得对任意的 n，都有 $|x_n|\leqslant M$ 成立，则称数列 $\{x_n\}$ 是有界数列；否则，称数列 $\{x_n\}$ 是无界的．

显然，有界数列 $\{x_n\}$ 的所有项都被包含在一个闭区间 $[-M,M]$ 上．

例如，数列 $\{\sin n\}$ 就是一个有界数列，而数列 $\{n^2\}$ 就是一个无界数列．

1.3.2 数列的极限

关于数列，我们现在主要研究，当数列 $\{x_n\}$ 的自变量 n 越来越大时，它的通项 x_n 是如何变化的？

例如，数列$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$直观上看，当 n 越来越大时，它的通项 $x_n=1+\frac{1}{n}$就越来越无限地接近于常数 1；数列$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$直观上看，当 n 越来越大时，它的通项 $x_n=\frac{1}{n^2}$就越来越无限地接近于常数 0.

那么，如何刻画$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$与 1 的接近程度？所谓数列$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$与 1 无限接近就是动点 $1+\frac{1}{n}$与定点 1 的距离无限小，因此，我们引入距离$\left|1+\frac{1}{n}-1\right|$.可以看出，当 n 越来越大时，$x_n=1+\frac{1}{n}$越来越无限接近于 1，就可以用距离$\left|1+\frac{1}{n}-1\right|$足够小来刻画.那么，$\left|1+\frac{1}{n}-1\right|$怎样才算足够小呢？事实上，给定$\frac{1}{100}$，只要 $n>100$，就有$\left|1+\frac{1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$，即从第 101 项开始，数列$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$中的所有项与常数 1 的距离都小于$\frac{1}{100}$.

同理，给定$\frac{1}{1\ 000}$，只要 $n>1\ 000$，就有$\left|1+\frac{1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{1\ 000}$；给定$\frac{1}{10\ 000}$，只要$n>10\ 000$，就有$\left|1+\frac{1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{10\ 000}$.

一般地，无论给定的正数 ε 多么小，总可以从数列的某一项（比如第 N 项）开始，只要 n 充分大（$n>N$），总有$|x_n-1|<\varepsilon$.

这时，我们就把常数 1 叫作数列$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$当$n\to\infty$时的极限.从而引入数列极限的定义.

定义 4

设$\{x_n\}$是一个数列，a 是一个常数，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，都有$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，则称常数 a 是数列$\{x_n\}$的极限，或称数列$\{x_n\}$收敛于 a，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.此时，我们也称数列$\{x_n\}$的极限存在；否则，称数列$\{x_n\}$的极限不存在，或称数列$\{x_n\}$发散.

注 ①极限定义中的 ε 是任意小的正数.一方面，正因为 ε 的这个性质，才可以表示$|x_n-a|$无限接近于 0；另一方面，一旦给出了 ε，ε 就被相应地确定了下来，在这个意义下，我们又认为 $\varepsilon,2\varepsilon,\sqrt{\varepsilon}$ 等都是等价的.

②极限定义中的 N 不是唯一的，也不一定非要是整数，只要存在这样的正数 N 即可.

③几何意义：在邻域 $U(a,\varepsilon)$之外至多含有数列$\{x_n\}$的有限项.如图 1—10 所示.

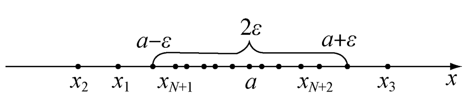

图 1—10

例 用定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

证明 对任意给定的$\varepsilon>0$(不妨设$\varepsilon<1$),要使$\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$,即要$\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|=\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,故只要$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.于是,对任意的$\varepsilon>0$,取$N=\dfrac{1}{\varepsilon}$,当$n>N$时,都有$\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$成立.根据极限的定义,有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

注 为什么不妨设$\varepsilon<1$?

1.3.3 收敛数列的性质

下面我们不加证明地给出收敛数列的几个性质.

定理1 若数列$\{x_n\}$收敛,则其极限是唯一的.

定理2 若数列$\{x_n\}$收敛,则数列$\{x_n\}$有界.

注 ①有界的数列不一定收敛.例如,数列$\{(-1)^n\}$.

②若数列$\{x_n\}$无界,则数列$\{x_n\}$发散.

定理3 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0(a<0)$,则存在正整数$N$,当$n>N$时,有$x_n>0(x_n<0)$.

定理4 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$和$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,若存在正整数$N$,当$n>N$时,有$x_n\leqslant y_n$,则$a\leqslant b$.

习题1.3

1.判断下列数列哪些是有界数列.

(1)$\left\{\dfrac{n+1}{n^2}\right\}$;　(2)$\{\sin n\}$;　(3)$\left\{\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}\right\}$;　(4)$\{n^2\}$.

2.根据数列极限的定义证明.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$;　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$;　(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)=1$.

1.4 函数的极限

1.4.1 $x\to x_0$时函数的极限

类似于数列极限,$x\to x_0$时函数$f(x)$的极限,就是研究当x无限地接近x_0时,函数$f(x)$的变化趋势.

例如,我们来观察当$x\to1$时,函数$f(x)=x+1$和$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的变化趋势.直观上看,当$x\to1$时,这两个函数都无限地接近2,它们的区别无非在于第一个函数在$x=1$处有

定义,而第二个函数在 $x=1$ 处无定义.实际上,当 $x\to1$ 时,就是指 x 无限地接近 1,但不能等于 1,所以跟函数本身在 $x=1$ 处是否有定义无关.

类似于数列极限,我们给出 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 极限的定义.

定义 1

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义,A 为常数.若对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正数 δ,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时以 A 为极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.此时也称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限存在;否则,称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在.

注 ①定义中的 ε 与数列极限定义中的 ε 具有相同的含义.

② δ 不唯一,往往是很小的一个正数,实际上,δ 越小越好,因为 δ 越小,意味着 x 与 x_0 越接近,在应用中强调的是 δ 的存在性.

③由定义可知:当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 以 A 为极限的几何意义就是当 x 落在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内时,函数的图像落在两平行直线 $y=A\pm\varepsilon$ 之间.如图 1—11 所示.

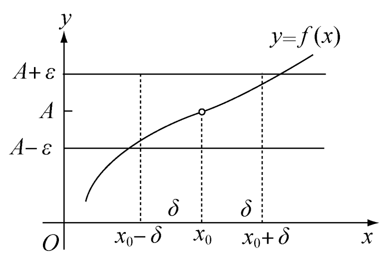

图 1—11

例 1 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$.

证明 对于任意的 x,由于 $|f(x)-A|=|C-C|\equiv0$,因此,对任意给定的 $\varepsilon>0$,总可以存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,总有 $|f(x)-A|=|C-C|=0<\varepsilon$ 成立,所以 $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$.

该例题说明常数的极限就是其本身.

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

证明 由于 $|f(x)-A|=|x-x_0|$,因此,对任意给定的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|x-x_0|<\varepsilon$.根据极限的定义得 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

例 3 证明 $\lim\limits_{x\to2}(2x+1)=5$.

证明 由于 $|f(x)-A|=|(2x+1)-5|=2|x-2|$,因此,对任意给定的 $\varepsilon>0$,要使 $2|x-2|<\varepsilon$,只要 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,于是取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$,则当 $0<|x-2|<\delta$ 时,总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{x\to2}(2x+1)=5$.

在 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 极限的定义中,我们研究的是当 x 从 x_0 的左、右两侧同时趋于 x_0 时,函数 $f(x)$ 的变化趋势,但是有些函数(如分段函数在分段点处)当 x 从 x_0 的左、右两

侧同时趋于 x_0 时，没有变化趋势，而 x 从一侧趋于 x_0 时却有变化趋势或函数仅在某点的一侧有定义（如在定义区间端点处）.于是我们引入左、右极限的定义.

定义 2

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左邻域 $U^-(x_0)$ 内有定义，A 为常数.若对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 δ，使得当 $0<x_0-x<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0^-)=A$.

请读者给出右极限的定义.右极限记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0^+)=A$.

由定义 1 和定义 2 不难得出下面的定理.

定理 1 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

例 4 讨论 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$.

解
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1,$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^-}1=1,$$

左、右极限都存在但不相等，由定理 1 知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.如图 1—12 所示.

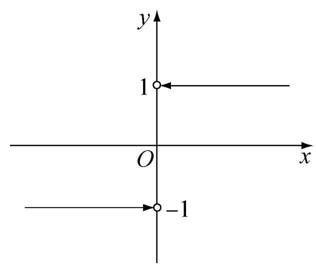

图 1—12

1.4.2 $x\to\infty$ 时函数的极限

设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,+\infty)$ 上，类似于数列情形，我们研究当自变量 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势.例如，对于函数 $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$，从直观上容易知道，当 x 无限增大时，函数 $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$ 无限地接近于 1.

一般地，当 x 趋于 $+\infty$ 时，函数极限的定义如下.

定义 3

设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,+\infty)$ 上，A 为常数.若对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 $X(>a)$，使得当 $x>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于 $+\infty$ 时以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.此时，也称当 x 趋于 $+\infty$ 时，$f(x)$ 的极限存在；否则，称当 x 趋于 $+\infty$ 时，$f(x)$ 的极限不存在.

注 当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限意味着：存在 $X>0$，当 $x\in[X,+\infty)$ 时，A 的任意小邻域内必含有 $f(x)$ 的全部函数值.

现设 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty,b]$ 或 $(-\infty,b]\cup[a,+\infty)$ 上的函数，当 $x\to-\infty$ 或 $x\to\infty$ 时，若函数 $f(x)$ 能无限地接近某个常数 A，则称 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 或 $x\to\infty$ 时以 A 为极限，